A. Distribuciones continuas.

7.1. La función de densidad de una variable aleatoria X viene dada por:

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} 0 & \mathrm{si\ x} \notin (0,1) \\ \mathrm{kx^2 \cdot (1-x)} & \mathrm{si\ x} \in (0,1) \end{cases}$$

(a) Calcular el valor de k para que f sea función de densidad.
(b) Calcule la probabilidad de que X sea menor que 0,25.
(c) Calcular la función de distribución de probabilidad.
(d) Calcular $\mathrm{E[X]}$ y $\mathrm{var[X]}$.
(e) Calcule la moda y la mediana de la distribución.

7.2. El tiempo de vida, en meses de una determinada especie de insectos viene dada por una variable aleatoria (v.a.) cuya función de densidad es,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ ke^{-\frac{x}{2}} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

a) Calcule k para que $f(x)$ sea una función de densidad.
b) Calcule la probabilidad de que, tomado un insecto de esa especie al azar, viva entre uno y dos meses.
c) Calcule la probabilidad de que, tomado un insecto de esa especie al azar, viva más de tres meses.
d) Calcular la función de distribución de probabilidad.
e) Calcule la esperanza de vida de la especie de insectos estudiada.
f) Calcule la varianza de vida de la especie de insectos estudiada. ¿Cuál es su desviación?
e) Calcule la moda y la mediana de la distribución.

7.3. La longitud de ciertos caracoles marinos, en centímetros, se distribuye según la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot (x-3) \cdot (7-x) & si\ x \in (3,7) \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

a) Calcule k para que $f(x)$ sea una función de densidad.
b) Calcule la probabilidad de que, tomado un caracol marino al azar, mida menos de $3{,}25\ cm$.
c) Para un estudio interesan aquellos caracoles marinos cuya longitud esté comprendida entre $3'5\ cm\ y\ 6\ cm$ ¿Qué porcentaje de caracoles hay para ese estudio
d) Calcule la longitud esperada en cm de los caracoles marinos estudiados.
e) Calcule la varianza en cm de los caracoles marinos estudiados. ¿Cuál es su desviación?

7.4. Sea X una v.a. continua cuya función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & si -2 \leq 0 < 0 \\ kx & si\ 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

a) Encuentre k para que $\mathrm{f(x)}$ sea función de densidad.
b) Calcule $\mathrm{P(X \geq -1)}$
c) Calcule $\mathrm{P(0 \leq X \leq 1´25)}$
d) Calcule la función de distribución.

7.5. Sea X una v.a. con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & si -1 \leq x \leq 0 \\ a \cdot e^{-x} & si\ x > 0 \end{cases}$$

a) Calcular el valor de a para que f sea una función de densidad.
b) Calcule la función de distribución.
c) Calcular la probabilidad de que la variable se encuentre entre $-0{,}5$ y $0{,}5$.
d) Calcular la esperanza y la varianza de la variable.
e) Calcule la moda y la mediana de la distribución.

7.7. Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \dfrac{k}{e^x + e^{-x}} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) Calcular el valor de k para que f sea una función de densidad de una variable aleatoria.
b) Calcular la función de distribución de probabilidad.
c) Para el valor de k anterior, calcular la probabilidad de que la variable esté entre 10 y 100.
c) Sabiendo que el valor de la variable es menor que 3, ¿cuál es la probabilidad de que sea mayor que 1?

7.7. La longitud de un tornillo se distribuye del siguiente modo

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot (x-1) \cdot (3-x) & si\ x \in [1,3] \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

a) Siendo f(x) la función de densidad. Sólo son válidos los tornillos comprendidos entre 1´7 y 2´4.

b) Calcular la probabilidad de que una pieza determinada sea útil. Si las piezas se empaquetan en lotes de 5 unidades y se acepta el lote si contiene menos de 2 piezas defectuosas, ¿cuál es la probabilidad de que un lote sea rechazado?

B. Distribución normal.

7.11. Si Z es una variable aleatoria normal estandarizada,

a) ¿Cuál es la probabilidad de tomar un valor menor que cero?
b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un valor mayor que 1,32?
c) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un valor menor que - 0,7?
d) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un valor comprendido entre 0,9 y 1,17?
e) ¿Cuál es la probabilidad de que Z tome un valor entre -3 y +3?
f) ¿Cuál es la probabilidad de que Z tome un valor comprendido entre –1,28 y +1,65.

7.12. Usando su tabla de probabilidad normal determine las siguientes probabilidades para la variable aleatoria normal estándar (Dibuje una curva normal y sombree el área bajo la curva):

a) $P\ (Z < 1{,}45)$
b) $P\ (-2´43 < Z < 1´76)$
c) $P\ (Z < 2´67)$
d) $P\ (0´65 < Z < 1{,}12)$
e) $P\ (Z > 1{,}45)$
f) $P\ (-2 < Z < 3)$
g) $P\ (-1{,}2 < Z < -0{,}76)$
h) $P\ (-2{,}78 < Z < 3{,}1)$
i) $P\ (Z > -2{,}13)$

7.13. Suponga que Z tiene una distribución normal estándar. Determine el valor de z que resuelve las siguientes probabilidades (Dibuje una curva normal, sombree el área bajo la curva y ponga los valores correspondientes en el eje horizontal):

a) $P(-z < Z < z) = 0{,}95$
b) $P(Z < z) = 0{,}9$
c) $P(-z < Z < z) = 0{,}99$
d) $P(Z < z) = 0{,}5$
e) $P(-z < Z < z) = 0{,}684$
f) $P(Z > z) = 0{,}1$
g) $P(-z < Z < z) = 0{,}9973$
h) $P(-1'6 < Z < z) = 0{,}8$

7.14. Averigüe el valor z en una distribución N(0,1) que corresponde a cada área descrita:

a) El 70% de los elementos está a la derecha de este valor z.
b) El 20% de los elementos se encuentra a la izquierda de este valor z.
c) El 10% de los elementos es mayor que este valor z.
d) El 60% de los elementos es menor que este valor z.
e) El 50% de los elementos se encuentran a la derecha de este valor z
f) El 30% de los elementos se encuentran a la izquierda de este valor z

7.15. Usando su tabla de probabilidad normal determine las siguientes probabilidades para la variable aleatoria normal X que tiene la media y desviación que indica en cada caso (Dibuja una curva normal y sombrea el área bajo la curva):

a) $P(X < 2{,}38)$ con $X \equiv N(1'3\,,3)$
b) $P(2{,}46 < X < 3{,}44)$ con $X \equiv N(3'1\,,1'4)$
c) $P(X < 3{,}00)$ con $X \equiv N(1{,}2)$
d) $P(0 < X < 3{,}2)$ con $X \equiv N(2\,,5)$
e) $P(X > 3{,}57)$ con $X \equiv N(4\,,1{,}2)$
f) $P(-1{,}34 < X < 2{,}76)$ con $X \equiv N(2\,,1)$
g) $P(-2{,}58 < X < -1{,}32)$ con $X \equiv N(-1\,,2'5)$
h) $P(X > -1{,}54)$ con $X \equiv N(-1'2\,,1)$

7.17. Suponga que X tiene una distribución normal. Determine el valor de k que resuelve las siguientes probabilidades (Dibuje una curva normal, sombree el área bajo la curva y ponga los valores correspondientes en el eje horizontal), siendo la distribución normal como indica en cada apartado,

a) $P(-k < X < k) = 0{,}95$ con $X \equiv N(2\,,1)$
b) $P(X < k) = 0{,}9$ con $X \equiv N(2'2\,,1'7)$
c) $P(k < X) = 0{,}99$ con $X \equiv N(0'5\,,2)$
d) $P(X < k) = 0{,}5$ con $X \equiv N(-1\,,1)$
e) $P(-k < X < k) = 0{,}684$ con $X \equiv N(1'7\,,1{,}3)$
f) $P(-k < X < k) = 0{,}9973$ con $X \equiv N(-1'2\,,1'9)$
g) $P(-1'5 < X < k) = 0{,}8$ con $X \equiv N(1\,,2)$

7.18. Averigüe el valor z en una distribución N(-1,3) que corresponde a cada área descrita:

a) El 70% de los elementos está a la derecha de este valor z.
b) El 20% de los elementos se encuentra a la izquierda de este valor z.
c) El 10% de los elementos es mayor que este valor z.
d) El 60% de los elementos es menor que este valor z.
e) El 50% de los elementos se encuentran a la derecha de este valor z
f) El 30% de los elementos se encuentran a la izquierda de este valor z

7.19. La media de los pesos de los estudiantes de un Instituto es 70 kg y la desviación típica 3 kg. Suponiendo que los pesos se distribuyen normalmente, hallar la probabilidad de que, escogido un estudiante al azar, pese …

a) Entre 60 kg y 65 kg.
b) Más de 90 kg.
d) 64 kg.
e) 64 kg o menos.
f) Si la probabilidad de que el estudiante pese menos de k kg es igual a 0,4. Halle el valor de k.

7.20. Se supone que los resultados de un examen siguen una distribución normal con media 78 y varianza 37. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que se presenta el examen obtenga una calificación superior a 72?
b) Si se sabe que la calificación de un estudiante es mayor que 72 ¿cuál es la probabilidad de que su calificación sea, de hecho, superior a 84?
c) Si la probabilidad de que una persona al azar obtenga más de k es $0{,}7$. Halle el valor de k.

7.21. Una empresa ha encontrado que la duración de sus llamadas telefónicas a larga distancia, tiene aproximadamente una distribución normal, con media de 3 minutos y desviación típica de 3 minutos. Tomada una llamada a larga distancia al azar calcular las siguientes probabilidades,

a) Probabilidad de que la llamada dure más de 2 minutos pero menos de 3 minutos.
b) Probabilidad de que la llamada se complete en menos de un minuto y medio.
c) Si la probabilidad de que la llamada dure más de k minutos es $0{,}8$. Halle el valor de k.

7.22. Varios test de inteligencia dieron una puntuación que sigue una ley normal con media 100 y desviación típica 15.

a) Determinar el porcentaje de población que obtendría una puntuación entre 95 y 110.
b) ¿Qué intervalo centrado en 100 contiene al 50% de las puntuaciones de la población?
c) ¿A partir de qué puntuación el porcentaje de población es menor que el 20 %?

7.23. El número de horas que duermen los estudiantes de bachillerato de un instituto en la semana de exámenes se cuantifica mediante una normal de media de 6 horas y desviación típica de 3 horas. Tomado un alumno/a al azar calcular,

a) Probabilidad de que duerma más de 8 horas.
b) ¿Determine un intervalo centrado en 6 horas de tal modo que el 60 % de los estudiantes de ese instituto estén incluidos en él?

7.24. El consumo promedio de combustible de una flota de 1,000 camiones sigue una distribución normal con una media de 12 millas por galón y una desviación estándar de 2 millas por galón.

a) ¿Cuántos camiones tendrán un promedio de 11 millas o más por galón?
b) ¿Cuántos camiones tendrán un promedio de menos de 10 millas por galón?
c) ¿Cuántos camiones tendrán un promedio entre 9,5 y 14 millas por galón?
d) Averigüe la probabilidad de que un camión elegido al azar tenga un promedio de 13,5 millas por galón o más.

7.25. En una determinada región, los pesos de bebes recién nacidos se distribuye normalmente con una media de 3,2 kg y una varianza de 1,21 kg^2. Elegido un bebe al azar en esa región, calcule las siguientes probabilidades

a) Pese entre 2,5 kg y 3,5 kg.
b) Pese como mucho 2,5 kg.
c) Pese 3 kg.
d) Pese menos de 1 kg
e) Pese más de 5 kg.
f) Si la probabilidad de que pese más de k kg es igual a 0,75. Halle el valor de k.
g) Halle el intervalo centrado en la media que tiene una probabilidad de 0,95.

7.26. La duración de un determinado tipo de lavadora automática tiene una distribución normal, con una media de 3,1 años y una desviación estándar de 1,2 años. La compañía ofrece en su garantía que si la lavadora presenta algún defecto será reemplazada.

a) Si la lavadora está garantizada por un año, ¿qué proporción del total de unidades vendidas como máximo podrá que ser reemplazada en virtud de la garantía?
b) Si el fabricante de las lavadoras está dispuesto a reemplazar sólo el 3% de las lavadoras que vende. ¿Por cuántos meses debe ofrecer la garantía para asegurar que no más de un 3% de las lavadoras pueda ser reemplazada?
c) ¿Qué porcentaje de las lavadoras vendidas van a durar entre 3 y 6 años?

7.27. El departamento de mantenimiento de proyectores, tiene instrucciones de reemplazar todas los proyectores al mismo tiempo. La experiencia anterior indica que la vida útil de los mismos se distribuye normalmente con una vida media de 750 horas y una desviación estándar de 40 horas. ¿Cuál es la probabilidad de que un proyector elegido al azar duré más de 775 horas? Determine un intervalo centrado en 750 horas en el que estén el 40 % de los proyectores.

7.28. Se regula una máquina despachadora de cafés para que sirva un promedio de 200 mililitros por vaso. Si la cantidad de bebida se distribuye normalmente con una desviación estándar igual a 15 mililitros,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un vaso contenga entre 191 y 209 mililitros?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que se derrame un vaso de más de 210 mililitros?
c) ¿Por debajo de qué valor obtendremos el 25% de las cantidades más pequeñas?

7.29. El gerente de personal de una gran compañía requiere que los postulantes a un puesto efectúen una prueba de aptitud y que en ella obtengan una calificación mínima de 500. Si las calificaciones de la prueba se distribuyen normalmente con una media de 485 y desviación estándar de 30:

a) ¿Qué porcentaje de postulantes aprobará la prueba?
b) Si aquellos postulantes que obtienen una puntuación comprendida entre 471 y 499 pueden optar a una segunda oportunidad, y un total de 1200 postulantes rindió la primera prueba, ¿cuántos de los 1200 postulantes tendrán derecho a rendir la prueba por segunda vez?
c) Determine una puntuación "k" correspondiente al percentil 90 de la distribución. Interprete.

B. Aproximación de Binomial a Normal. Corrección de Yates

7.31. Un jugador de baloncesto encesta 4 de cada 5 tiros libres que lanza. Si esta temporada ha lanzado 90 tiros libres, calcula la probabilidad de que haya encestado 80 o más tiros libres.

7.32. Un cierto equipo electrónico está formado por 100 componentes conectados. Si cada componente tiene una probabilidad de 0.02 de romperse cuando el equipo es lanzado en un cohete, hallar la probabilidad de que al hacerlo se rompan 10 o más componentes.

7.33. Supongamos que un tirador tiene probabilidad de 0.4 de acertar en la diana. Hallar la probabilidad de que después de realizar 20 disparos halla acertado al menos 4 lanzamientos. Hacerlo mediante la distribución binomial y la aproximación normal y comparar los resultados.

7.34. Una máquina produce componentes que son defectuosos en un 10%. Se elige al azar una muestra de estos 50 componentes. Calcular las probabilidades de que a) como mucho 6 componentes estén defectuosos, b) tenga 3 o más componentes defectuosos.

7.35. Un examen tipo test consta de 38 preguntas a contestar verdadero o falso. El examen se aprueba si se contesta correctamente al menos 20 preguntas. Un alumno responde al examen lanzando al aire una moneda y contestando verdadero si sale cara y falso si sale cruz. Halla a) La probabilidad de aprobar el examen b) Probabilidad de acertar más de 24 y menos de 31.

7.36. Lanzamos una moneda trucada 400 veces. Halla la probabilidad de que el número de caras esté entre 180 y 220 si la probabilidad de cara es 3/4.

C) Teorema central del límite. Distribución de la media muestraL.

7.41. La variable altura de las alumnas que estudian en una escuela de idiomas sigue una distribución normal de media 1´62 m y la desviación típica 0´12 m. Se toma una muestra aleatoria de 100 alumnas.

a) Escribe la distribución de la variable altura media.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la altura media de la muestra aleatoria de 100 alumnas sea mayor que 1´60 m?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que la altura media de la muestra aleatoria se sitúe entre 1´60 m y 1´65 m?

7.42. La duración de la bombillas de 100 W que fabrica una empresa sigue una distribución normal con desviación típica de 210 horas de duración. Su vida media está garantizada durante 800 horas. Se escoge al azar una muestra de 100 bombillas,

a) Escribe la distribución de la variable duración media.
b) Calcula la probabilidad de que la vida media muestral de las bombillas sea mayor que 780 horas.
c) Calcula la probabilidad de que la vida media muestral de las bombillas esté entre las 790 y las 805 horas.

7.43. La vida de los habitantes de un determinado lugar se distribuyen mediante una distribución normal de media 75 años y desviación típica de 20 años. Se toma una muestra aleatoria simple de 25 habitantes de ese lugar:

a) Escribe la distribución de la variable altura media.
b) Calcula la probabilidad de que la media muestral esté por encima de los 80 años.
c) Calcula la probabilidad de que la media muestral se sitúe entre los 67 y los 75 años.

7.44. Un camión registra diariamente el número de km que hace. Estas distancias se distribuyen mediante una ley normal de media 450 km y desviación típica de 100 km. Si tomamos una muestra de 16 días,

a) Escribe la distribución de la variable distancia media recorrida diariamente.
b) Calcula la probabilidad de que la distancia media muestral esté por debajo de los 440 km.
c) Calcula la probabilidad de que la distancia media muestral esté entre los 430 km y los 470 km.

7.45. Las notas finales de lengua y literatura de los alumnos de 2º Bachillerato en un instituto se distribuyen mediante una ley normal de media 4´75 y desviación 2´25 Tomada una muestra de 25 alumnos,

a) Escribe la distribución de la variable puntuación media de la muestra.
b) Calcula la probabilidad de que la puntuación media sea de al menos 5.
c) Calcula la probabilidad de que la puntuación media se sitúe entre el 5 y el 7.

7.46. El recibo mensual de los móviles de un grupo de 36 alumnos de 2º Bachillerato se distribuye mediante una normal de media 15 € y desviación típica 12 €.

a) Escribe la distribución de la variable recibo medio de la muestra.
b) Calcula la probabilidad de que el recibo medio sea inferior a 10 euros.
c) Calcula la probabilidad de que el recibo medio esté entre 12 y 18 euros.

7.47. El número de alumnos de un centro escolar se distribuye de año en año mediante una ley normal de media 700 alumnos y desviación típica 125 alumnos. Se toma una muestra de 100 alumnos,

a) Escribe la distribución de la variable número medio de alumnos de la muestra.
b) Calcula la probabilidad de que el número medio de alumnos sea inferior a 675.
c) Calcula la probabilidad de que el número medio de alumnos sea al menos de 755.
d) Calcula la probabilidad de que el número medio de alumnos se sitúe entre 685 y 715.

7.48. La velocidad de un turismo en un circuito a máxima potencia se distribuye mediante una normal de media 120 km/h y una desviación de 30 km/h. Se toman 16 pruebas sobre el mismo recorrido.

a) Escribe la distribución de la variable velocidad media de la muestra.
b) Calcula la probabilidad de que la velocidad media sea inferior a 100 km/h.
c) Calcula la probabilidad de que la velocidad media sea al menos de 145 km/h.
d) Calcula la probabilidad de que la velocidad media se sitúe entre 110 km/h y 130 km/h.

7.49. La vida de un determinado tipo de lavadora presenta normalidad de media 5 años y desviación típica 2´5 años. Se toma una muestra de 25 lavadoras,

a) Escribe la distribución de la variable vida media de la muestra.
b) Calcula la probabilidad de que la vida media sea superior a 6´25 años.
c) Calcula la probabilidad de que la vida media sea inferior a 3 años.
d) Calcula la probabilidad de que la vida media se sitúe entre 4 y 6 años.

D. Intervalos de confianza y tamaño mínimo muestral mediante la distribución normal y binomial.

7.51. En un examen EVAU en la que participan miles de candidatos se va a hacer un examen tipo test que valora de 0 a 100 a los alumnos. La desviación típica de las calificaciones es de 10 puntos. Si se elige una muestra de tamaño 100 con media muestral de 71 puntos. Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 90 %.

7.52. Se ha extraído una muestra de 10 familias de residentes de un barrio, obteniéndose los siguientes datos acerca de sus rentas familiares:

19.987, 20.096, 19.951, 20.263, 20.014,
20.027, 20.023, 19.942, 20.078, 20.069

Se supone que la renta familiar de los residentes en el barrio siguen una ley normal de desviación típica 150 €. Encontrar un intervalo de confianza al 95 % para la renta familiar media. ¿Crees que sería válido el intervalo de confianza obtenido si la muestra se hubiera elegido entre las familias con más ingresos del barrio? Razona tu respuesta.

7.53. La desviación típica del número de horas diarias que duermen los estudiantes de un instituto es de 3 horas. Se considera una muestra aleatoria de 40 estudiantes de ese instituto que revela una media de sueño de 7 horas. Suponiendo que el número de horas de sueño sigue una distribución normal, encontrar el intervalo de confianza al 97% para el número medio de horas de sueño de todos los estudiantes de ese centro. Interpretar el significado del intervalo obtenido.

7.54. La talla de los varones recién nacidos en una determinada ciudad sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica de 2,4 cm. Si en una muestra de 81 recién nacidos de esa ciudad obtenemos una talla media de 51 cm, encontrar el intervalo de confianza al 97% para la talla media de los recién nacidos de esa ciudad. Interpretar el significado del intervalo obtenido.

7.55. Para efectuar un control de calidad sobre la duración en horas de un componente electrónico se elige una muestra aleatoria de 36 componentes obteniéndose una duración media de 40 horas. Sabiendo que la duración de estos componentes electrónicos se distribuye según una normal con una desviación típica de 10 horas. Encontrar el intervalo de confianza al 97 % para la duración media de las componentes electrónicas. Interpretar el significado del intervalo obtenido. Si quisiéramos un intervalo de confianza de menor ancho, ¿qué opciones tendríamos? Razona tu respuesta.

7.56. Un Ayuntamiento va a realizar una encuesta para averiguar si los ciudadanos están a favor de las últimas medidas en relación a las fiestas que se han tomado. Se ha preguntado a 100 vecinos elegidos de forma aleatoria entre todos los ciudadanos, obteniendo una media de 7´5 puntos de satisfacción y sabemos que las puntuaciones se distribuyen según una normal de desviación típica 1. Encontrar el intervalo de confianza al 97´8 % para la media de satisfacción. Interpretar el significado del intervalo obtenido. ¿Crees que será válido el intervalo de confianza obtenido, si hubiéramos elegido a los primeros 100 vecinos que contesten la encuesta en el horario 10 a 14? Razona tu respuesta.

7.57. Para determinar cómo influye la práctica diaria de deporte en el peso se ha realizado un estudio sobre 100 hombres que practican deporte de forma diaria. Obteniéndose una media de 65 kilos y suponemos que el peso en la población de personas que practican deporte se distribuye según una normal con una desviación típica de 2 kilos. Encontrar el intervalo de confianza al 95 % para la media de peso de las personas que practican deporte. Interpretar el significado del intervalo obtenido. Si quisiéramos un intervalo de confianza de menor ancho, ¿qué opciones tendríamos? Razona tu respuesta.

7.58. La compañía suministradora de gas desea estimar el consumo medio de gas por hogar en una determinada ciudad, realizando una encuesta a 400 viviendas elegidas aleatoriamente de la ciudad. Se ha obtenido un consumo medio de 800 m^3 se sabe que el consumo de gas se distribuye según una normal de desviación típica 50 m^3. Encontrar el intervalo de confianza al 95% para la media de consumo de gas por hogar en la ciudad. Interpretar el significado del intervalo obtenido. ¿Crees que será válido el intervalo de confianza obtenido, si hubiéramos elegido las 400 viviendas más próximas al encuestador? Razona tu respuesta.

7.59. Tras múltiples observaciones se ha constatado que el número de pulsaciones de los deportistas entre 20 y 25 años se distribuye normalmente con una desviación típica de 9 pulsaciones. Si una muestra de 100 deportistas de esa edad presenta una media de 64 pulsaciones, responde: Encontrar el intervalo de confianza al 97% para la media de pulsaciones de los todos los deportistas de esa edad.

7.60. Para determinar cómo influye en la osteoporosis una dieta pobre en calcio, se realiza un estudio sobre 100 afectados por la enfermedad, obteniéndose que toman una media de calcio al día de 900 mg. Suponemos que la toma de calcio en la población de afectados por la enfermedad se distribuye normalmente con una desviación típica de 150. Encontrar un intervalo de confianza al 99% para la media de calcio al día que toma toda la población afectada.

7.61. Finalizado el curso se ha realizado una encuesta para los estudiantes de 2º bachillerato sobre la valoración (1 a 10) que los alumnos hacen del cumplimiento de la programación. La puntuación sigue una distribución normal con desviación típica 1´75. Se extrae una muestra aleatoria y con un nivel de confianza del 97 % se determina un intervalo de confianza para la media de amplitud 0´5425.

a) Determinar el tamaño mínimo de la muestra seleccionada.
b) Determinar el intervalo de confianza si la muestra tomada dio una puntuación media de 6´7.

7.62. Se supone que el tiempo medio dedicado a ver TV en una cierta zona se puede aproximar mediante una variable aleatoria normal con media desconocida y desviación típica de 15 minutos. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 400 espectadores de TV en dicha zona, obteniéndose que el tiempo medio diario dedicado a ver la TV es de 3 horas.

a) Determinar un intervalo de confianza para la media con un nivel de confianza del 95%.
b) ¿Cuál ha de ser el tamaño mínimo de la muestra para que el error en la estimación de la media sea menos o igual que 3 minutos, con un nivel de confianza del 90 %?

7.63. Se supone que el precio en euros de un refresco se puede aproximar mediante una variable de tipo normal de media desconocida y desviación típica 0´09 €. Se toma una muestra aleatoria simple del precio del refresco en 10 establecimientos y resultan los siguientes precios:

1´50 € 1´60 € 1´10 € 0´90 € 1 € 1´60 € 1´40 € 1´30 € 1´20 €

a) Determinar un intervalo de confianza al 95 % para la media del precio del refresco.
b) Calcular el tamaño muestral mínimo que ha de tener la muestra elegida para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestral y la media sea menor o igual que 0´10 € con probabilidad mayor o igual que 0´99.

7.64. Tomada al azar una muestra de 500 personas en Madrid, se encontró que 220 leían algún periódico digital diariamente. Calcula, con un nivel de confianza del 96 %, entre que valores se encuentra la verdadera proporción de periódicos.

7.65. El tiempo medio que tarda una empresa de mensajería en recoger un paquete en el domicilio de un cliente sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ =10 minutos. Se eligen al azar 10 encargos y se mide el tiempo que tardan los empleados en recoger los paquetes, siendo estos: 15, 19, 20, 22, 24, 25, 27, 28, 30 y 32 minutos respectivamente.

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo medio que tarda la empresa en recoger un paquete del domicilio del cliente, con un nivel de confianza del 95 %
b) ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto?

7.66. El consumo medio de agua por habitante y día en España sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 30$ litros. Tomando una muestra aleatoria de habitantes, se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza para la media poblacional (130.4, 169.6) con un nivel de confianza del 95 %.

a) Calcula el tamaño de la muestra utilizada y calcula el valor que se obtuvo para la media muestral.

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 92.98 %?

7.67. Un fabricante de lámparas LEDs sabe que la vida útil de una lámpara LED sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 1000 horas. Tomando una muestra aleatoria de lámparas producidas por dicho fabricante, se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza para la media poblacional (49804 , 50196) con un nivel de confianza del 95 %.

a) Calcula el tamaño de la muestra utilizada y calcula el valor que se obtuvo para la media muestral.

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 50 y un nivel de confianza del 92.98 %?

7.68. Se desea determinar un intervalo de confianza con nivel de confianza del 99% para la proporción de personas que compran sólo una vez a la semana. Si se sabe que en una muestra aleatoria simple de 400 amas de casa sólo 180 de afirmaron comprar una vez a la semana

7.69. Una empresa produce dispositivos electrónicos con pantalla HD, la resolución de estas pantallas sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 20\, píxeles$. Se tomó una muestra aleatoria de 100 dispositivos electrónicos y mediante un estudio estadístico se obtuvo el intervalo de confianza (1077.08 , 1083.92) para la resolución media de las pantallas elegidas al azar.

a) Calcula el valor de la resolución media de las pantallas de los 100 dispositivos electrónicos elegidos para la muestra.

b) Calcula el nivel de confianza con el que se ha obtenido dicho intervalo.

c) Sin calcular el intervalo de confianza, ¿se podría admitir que la media poblacional sea $\mu = 1077.08$ píxeles con un nivel de confianza del 90 %? Razona tus respuestas.

7.70. Un fabricante de ordenadores sabe que el tiempo de duración, en meses, de un componente del ordenador que fabrica sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 6 meses. Con una muestra de su producción, elegida al azar, y un nivel de confianza del 95 % se ha obtenido para la media poblacional el intervalo de confianza (23.0398, 24.9602).

a) Calcula el valor que se obtuvo para la media de la muestra y el tamaño de la muestra utilizado.

b) ¿Cuál hubiera sido el error máximo admisible de su estimación si hubiera tomado una muestra de tamaño 250?

7.71. Una multinacional está estudiando la posibilidad de instalar un nuevo sistema de producción en sus empresas. Antes de hacerlo decide consultar a sus trabajadores. Como no tiene ninguna referencia previa sobre la opinión de sus empleados, supone que tal opinión está dividida en dos partes iguales al 50 %. Si desea una fiabilidad en la encuentra del 99 %, con un error máximo del 4%, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra?

7.72. Uno de los líderes de un colectivo laboral desea plantear una cuestión a todos los miembros del grupo. Si más de la mitad respondieran NO entonces preferiría no plantearla. Para salir de dudas, elige al azar 40 trabajadores a los que hace la pregunta y sólo 12 responden NO. ¿ entre qué límites se hallará la verdadera proporción al nivel de confianza del 95%?

7.73. Calcular un intervalo de confianza al nivel $\alpha = 0.05$ para la probabilidad de p de que un recién nacido sea niño si en una muestra de tamaño 123 se han obtenido 67 niños.

7.74. Se ha hecho un estudio sobre la proporción de enfermos de cáncer de pulmón detectados en hospital que fuman, obteniéndose que de 123 enfermos 41 de ellos eran fumadores. Obtener un intervalo de confianza para dicha proporción con un nivel de significación del 5 %.

7.75. Una firma comercial encuesta a 100 individuos para conocer sus opiniones sobre la elección de dos productos alternativos A y B recientemente fabricados. El resultado de la encuesta arroja que el producto A lo han elegido 55 individuos y el producto B 45. Hallar un intervalo de confianza al 97% para la proporción de individuos que eligen cada producto.

7.76. Al analizar 40 muestras de una aleación de bajo punto de fusión de tipo "wood" se ha detectado ausencia de cadmio en 12 de ellas. Determinar un intervalo de confianza para la proporción de muestras de dicha aleación que no contienen cadmio.

E. Contraste de hipótesis unilateral y bilateral con la distribución normal.

7.81. Se sabe que la edad de los profesores de una comunidad autónoma sigue una distribución normal con varianza de 5 años. Una muestra aleatoria de 200 profesores de dicha comunidad tiene una media de 45 años. Plantear un contraste de hipótesis para ver si podemos afirmar con un nivel de significación del 0´05 % que la edad media de todos los profesores de la comunidad es de 46 años. Determinar la región de aceptación y sacar conclusiones a partir de los datos obtenidos.

7.82. Una empresa fabrica tornillos para llantas, cuyo diámetro sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 2 mm. Se selecciona un lote de 100 tornillos y resulta que la media muestral es de 19 mm.

a) Determina un intervalo de confianza al 98 % para la media de la distribución.
b) Plantea un contraste de hipótesis que permita decidir si los tornillos fabricados se ajustan a los 20 mm con una confianza del 95 %. Concluye e interpreta el resultado del contraste a la vista de los datos obtenidos.

7.83. El gasto medio diario por turista el año pasado era de 65 €. Tras una intensa campaña de turismo para intentar que los turistas aumenten su gasto diario, se tomo una muestra aleatoria de 3.600 turistas, obteniendo una media diaria sobre la muestra de 68 €. Suponiendo que el gasto diario sigue una distribución normal con desviación típica 40 €,

a) Plantea un test de hipótesis para contrastar la hipótesis de que la campaña no ha surtido efecto frente a la alternativa de que sí ha surtido efecto, tal como parecen indicar los datos.
b) Calcula la región de aceptación del test anterior con un nivel de significación del 5 %.
c) Concluye si ha habido o no aumento de gasto diario a partir de los datos recogidos y el contraste anterior con el nivel de significación del 5 %.

7.84. Un fabricante de lámparas eléctricas está ensayando un nuevo método de producción que se considerará aceptable si las lámparas obtenidas por este método dan lugar a una población normal de duración media 2400 horas, con una desviación típica igual a 300. Se toma una muestra de 100 lámparas producidas por este método y esta muestra tiene una duración media de 2320 horas. ¿Se puede aceptar la hipótesis de validez del nuevo proceso de fabricación con un riesgo igual o menor al 5%?

7.85. Se sabe que la renta por persona declarada por todos los ciudadanos de un país sigue aproximadamente, una distribución normal con media 10.840 € y con desviación típica de 2.700 €. Con objeto de analizar la renta de los contribuyentes domiciliados en cierta Administración de Hacienda, se toma una muestra aleatoria de 400 declaraciones, obteniéndose una media de 10.500 € por persona. Si se mantiene la desviación típica:

a) Fórmula un test para contrastar la hipótesis de que la renta media de las declaraciones presentadas en la Administración es la misma que la global de todo el país frente a que es diferente, tal como parece indicar la muestra, calcula el intervalo de aceptación con un nivel de significación del 1 % y concluye si sigue siendo igual que el global.
b) Calcula un intervalo al 98 % de confianza para la renta media de los contribuyentes de dicha administración.

7.86. Según una publicidad de un banco, el nivel de satisfacción de sus clientes con el banco es de al menos el 80 %. Se toma una muestra de 600 clientes y 420 afirman estar satisfechos. Plantear un contraste de hipótesis para corroborar la publicidad del banco con un nivel de significación del 10 %. Hallar el correspondiente intervalo de aceptación y extraer las conclusiones debidas.

7.87. Una máquina está preparada para fabricar piezas de, a lo sumo, 10 cm de longitud. Se toma una muestra de 1000 piezas comprobándose que la media de sus longitudes se es de 9´9752 cm. La longitud de las piezas fabricadas por esa máquina sigue una distribución normal con desviación típica 0´2 cm.

a) Plantear un contraste de hipótesis unilateral para comprobar si, con los datos de que se disponen, es posible afirmar que la media de la longitud de las piezas fabricadas por la máquina es de más de 10 cm.
b) Determinar la región de aceptación de la hipótesis nula de eses contraste para un nivel de significación $\alpha = 0´025$.
c) Con los datos de la muestra y usando el contraste del primer apartado, ¿qué conclusión se obtendría sobre la longitud media de las piezas fabricadas?

7.88. Una multinacional asegura que sus empresas franquiciadas arrojan un beneficio que se distribuye normalmente con una media de beneficios de, al menos, 1´8 millones de euros anuales, con una desviación típica de 0´26 millones de euros. Para contrastar estos datos, se realiza un estudio a 36 franquicias de la empresa, obteniéndose una media de 1´7 millones de euros de beneficios.

a) Con un nivel de significación del 5 %, ¿se puede aceptar la hipótesis de la multinacional? Plantea y resuelve el correspondiente test de hipótesis.
b) ¿Qué podemos decir si el nivel de confianza es del 99´5 %?

7.89. Tras unos programas educativos para intentar reducir el porcentaje del 10 % de fumadores que hay en la universidad, se toma una muestra aleatoria de 400 universitarios de los que se obtiene que 36 son fumadores.

a) Plantea un test de hipótesis para contrastar la hipótesis de que los programas educativos no han producido el efecto deseado, frente a la alternativa de que sí lo han hecho.
b) Calcula la región de aceptación del test anterior con un nivel de significación del 5 %.
c) Concluye si ha habido o no disminución en el habito del tabaco a partir de los datos recogidos y el contraste anterior con el nivel de significación del 5 %.

F. Variables discretas. Parámetros. Variables independientes.

7.91. Se considera la variable aleatoria discreta X con distribución de probabilidades,

X	0	2	4	6	8	10
P(X)	0,35	0,25	0,15	0,05	p	0,1

a) Calcula la probabilidad de que la variable sea menor que 5.

b) Calcula la probabilidad de $X = 8$.

c) Calcula la probabilidad de que X como mínimo sea 2,4 y como máximo 7.

d) Calcula la esperanza o valor esperado de la variable X.

e) Calcula la varianza y la desviación típica de la variable X.

7.92. Sea una variable X que se distribuye normalmente según $\mu = 3 \;\; y \; \sigma = 1{,}5$. Sea una variable Y, independiente a la anterior, que se distribuye mediante una normal de media 2 y varianza 4.

a) Calcula la probabilidad de que X sea mayor que 3,5 e Y menor que 4.
b) Calcula la probabilidad de que tanto X como Y sean superiores a 2.
c) Calcula la probabilidad de que X sea menor o igual que 2,5 e Y sea mayor que 1,5.
d) Calcula la probabilidad de que X sea mayor que 3,5 e Y < 4.
e) Sabiendo que X es mayor que 3, calcular la probabilidad de que Y sea menor que 2.