A. CÁLCULO DE DETERMINANTES. REGLA DE SARRUS, DE LAPLACE Y DE CHIO

10.1. Calcula los siguientes determinantes mediante la regla de Sarrus:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 7 & 14 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

10.2. Halla los valores del parámetro para que los siguientes determinantes sean nulos

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ (4-m) & (6+m) \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} (m+3) & 5 \\ -1 & (m-3) \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 2 & k & 1 \\ 4 & 2 & k \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -2 & (m+1) & 1 \\ 2m & m & 0 \\ 4 & 7 & (m-2) \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} k & k-1 & 1 \\ 2 & k & k \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 2 & (t-1) & 1 \\ t & t & t \\ -2 & t+1 & -1 \end{vmatrix}$

10.3. Calcula los siguientes determinantes de Vandermonde,

$a)$ $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ $b)$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 49 \end{vmatrix}$ $c)$ $\begin{vmatrix} 100 & 36 & 9 \\ 10 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$d)$ $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 25 & -5 & 1 \end{vmatrix}$ $e)$ $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ $f)$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$

10.4. Calcula los siguientes determinantes mediante el método de Laplace:

$a)$ $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $b)$ $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $c)$ $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

$d)$ $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ $e)$ $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 & -3 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ $f)$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

10.5. Calcula los siguientes determinantes de por el método de Chio.

$a)\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $\quad b)\ \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ $\quad c)\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

$d)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ $\quad e)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 25 & 49 \\ 8 & 27 & 125 & 343 \end{vmatrix}$ $\quad f)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

B. MATRIZ INVERSA POR DETERMINANTES

10.11. Comprueba que la matriz $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ tiene inversa y calcúlala.

10.12. Determina las dos condiciones para que una matriz tenga inversa. Indica, mediante los cálculos oportunos, cuáles de las siguientes matrices tienen inversa y cuáles no,

$a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad b)\ B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ $\quad c)\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$d)\ D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad e)\ E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad f)\ F = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & -3 \\ 4 & -3 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

10.13. Calcula la matriz inversa de cada matriz, en el caso de que exista:

$a)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad b)\ B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad c)\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$d)\ D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad e)\ E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad f)\ F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

10.14. Estudiar la existencia de la matriz inversa en función del parámetro k. Para los valores para los que existe inversa, calcular, utilizando determinantes, dicha matriz inversa.

$a)\ A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & k\\ k & 2\end{pmatrix}$ $b)\ B=\begin{pmatrix}0 & 7 & 5\\ 3 & 4 & k\\ 7 & 0 & 5\end{pmatrix}$ $c)\ C=\begin{pmatrix}k & k-1 & -2k\\ 2 & 6 & 8k\end{pmatrix}$

$d)\ D=\begin{pmatrix}1 & k & -k\\ 12 & -k-2 & -2\\ k & -2 & 1\end{pmatrix}$ $e)\ E=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 1\\ 1 & k & 1 & 2\\ 3 & 1 & -k & 3\end{pmatrix}$ $f)\ F=\begin{pmatrix}k+1 & 1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & k+1 & 3\\ 1 & k+1 & 2 & -2\end{pmatrix}$

10.15. Averiguar para que valores del parámetro t, la matriz A no tiene inversa. Calcular la matriz inversa de A por determinantes para $t = 2$ si es posible:

$$A=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{1}\\ \mathbf{0} & t & \mathbf{3}\\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & -t\end{pmatrix}$$

C. PROPIEDADES DE LAS DETERMINANTES

10.21. Los siguientes determinantes son todos nulos. Explica por qué aplicando exclusivamente las propiedades de los determinantes:

$a)\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}$ $b)\begin{vmatrix}1 & 0 & 4 & 1\\ 2 & 0 & 3 & 2\\ -1 & 0 & 1 & 1\\ 3 & 0 & -3 & -2\end{vmatrix}$ $c)\begin{vmatrix}2 & 10 & 5\\ 1 & 6 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}$ $d)\begin{vmatrix}2 & 1 & 5 & 3\\ 3 & 2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 8\\ 6 & 6 & 8 & 12\end{vmatrix}$

$e)\begin{vmatrix}5 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & -4 & 6\end{vmatrix}$ $f)\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{vmatrix}$ $g)\begin{vmatrix}4 & 2 & 2\\ 3 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}$ $h)\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 4\\ -1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 4\end{vmatrix}$

10.22. Si $\begin{vmatrix}a & b & c\\ p & q & r\\ u & v & w\end{vmatrix}=25$, calcula el valor de $\begin{vmatrix}2a & 2c & 2b\\ 2u & 2w & 2v\\ 2p & 2r & 2q\end{vmatrix}$ mediante las propiedades de los determinantes.

10.23. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$ calcula, sin desarrollar, los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

10.24. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 7$ calcula los siguientes determinantes por las propiedades de los mismos,

$a)\ \begin{vmatrix} a+2x & b+2y & c+2z \\ p & q & r \\ 2x+p & 2y+q & 2z+r \end{vmatrix}$ $b)\ \begin{vmatrix} -b & c+b & 5a \\ -q & r+q & 5p \\ -y & z+y & 5x \end{vmatrix}$

10.25. Si $\begin{vmatrix} a & 2 & b \\ 0 & 1 & c \\ e & f & 0 \end{vmatrix} = 2$ calcula, sin desarrollar, los siguientes determinantes:

$a)\ \begin{vmatrix} 3e & 3f & 0 \\ 2e & 1+2f & c \\ a & 2 & b \end{vmatrix}$ $b)\ \begin{vmatrix} b & a & 4 \\ c & 0 & 2 \\ 0 & e & 2f \end{vmatrix}$ $c)\ \begin{vmatrix} a & 2 & b \\ 0 & 1 & c \\ a+e & 2+f & b \end{vmatrix}$

E. CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA POR DETERMINANTES

10.31. Calcular la matriz inversa de las siguientes matrices por el método de Gauss-Jordan.

$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

10.32. Determina la matriz X que verifica que $XA + B = I$ con I la matriz identidad de orden 2, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

10.33. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3, resuelve las siguientes ecuaciones matriciales:

$a)\ A + BX = 2I \qquad b)\ XA + B = 2I \qquad c)\ BX - 2I = A$

10.34. Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular la matriz X que verifica en cada apartado la ecuación.

$a)\ AX = BX + I \qquad b)\ XA - X = B \qquad c)\ B^tX + I = 2X$

10.35. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3, resuelve las siguientes ecuaciones matriciales:

$a)\ A \cdot X \cdot B = I \qquad b)\ X \cdot A^{-1} - B = I \qquad c)\ A = X - B^{-1} \cdot X$

E. RANGO DE MATRICES MEDIANTE DETERMINANTES

10.41. Estudiar el rango de la matriz A mediante determinantes:

a) A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) B = $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ c) C = $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \\ 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ d) D = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

10.42. Estudiar el rango de la matriz A en cada caso, mediante determinantes, y en función de los distintos valores del parámetro t.

$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & t \end{pmatrix} \qquad b)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & t-2 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix} \qquad c)\ C = \begin{pmatrix} t & 1 & 3 \\ 2 & t & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

10.43. Estudiar el rango de las siguientes matrices según los distintos valores del parámetro establecido

$a)\ A=\begin{pmatrix} t & t & 0 \\ t & 1 & t \\ t & 1 & 3-t \end{pmatrix}$ $\quad b)\ B=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 2 \\ 4 & 4 & k \end{pmatrix}$ $\quad c)\ C=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$

$d)\ D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ m & 0 & 1 & 0 \\ 1 & m+1 & m & m+1 \end{pmatrix}$ $\quad e)\ E=\begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 & t \\ 1 & 1 & t & t^2 \end{pmatrix}$ $\quad f)\ F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & k-1 & 7 \end{pmatrix}$

$h)\ H=\begin{pmatrix} t & 0 & t & 0 \\ 4 & -6 & 8 & -2 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad g)\ G=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$

F. BASES DE ESPACIOS VECTORIALES

10.51. Estudiar si los siguientes vectores son linealmente independientes

a) $\vec{u}_1=2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+3\vec{k}$, $\vec{u}_2=3\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k}+2\vec{\imath}$, $\vec{u}_3=5\vec{\imath}+\vec{\jmath}+2\vec{k}$

b) $\vec{v}_1=(1,2,0,1)$, $\vec{v}_2=(2,4,3,1)$, $\vec{v}_3=(1,2,3,1)$

c) $\vec{u}_1=(3,-1,1,0)$, $\vec{u}_2=(1,3,2,1)$, $\vec{u}_3=(5,1,4,1)$

d) $\vec{v}_1=(1,0,1,0)$, $\vec{v}_2=(0,1,0,1)$, $\vec{v}_3=(1,0,-1,0)$, $\vec{v}_4=(1,0,0,1)$

10.52. Determinar cuáles de las siguientes colecciones de vectores son bases en el espacio que se señala,

a) $S_1=\{\vec{\imath}-2\vec{\jmath}\,,-2\vec{\imath}+4\vec{\jmath}\}$ en $\mathbb{R}^2$

b) $S_2=\{\vec{\imath}-\vec{\jmath}\,,\ 2\vec{\imath}+\vec{\jmath}-\vec{k},\ \vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}\}$ en $\mathbb{R}^3$

c) $S_3=\{(1,0,2)\,,\ (2,6,1),\ (1,2,1)\}$ en $\mathbb{R}^3$

d) $S_4=\{(2,0,-1,0)\,,\ (1,-2,0,-1),\ (1,0,2,-1),\ (0,2,-3,2)\}$ en $\mathbb{R}^4$

e) $S_5=\{(1,1,1,0)\,,\ (1,0,1,1),\ (1,1,0,1),\ (0,1,1,1)\}$ en $\mathbb{R}^4$