

A. CÁLCULO DE DETERMINANTES. REGLA DE SARRUS, DE LAPLACE Y DE CHIO

10.1. Calcula los siguientes determinantes mediante la regla de Sarrus:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 7 & 14 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

10.2. Halla los valores del parámetro para que los siguientes determinantes sean nulos

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ (4-m) & (6+m) \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} (m+3) & 5 \\ -1 & (m-3) \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 2 & k & 1 \\ 4 & 2 & k \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -2 & (m+1) & 1 \\ 2m & m & 0 \\ 4 & 7 & (m-2) \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} k & k-1 & 1 \\ 2 & k & k \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 2 & (t-1) & 1 \\ t & t & t \\ -2 & t+1 & -1 \end{vmatrix}$

10.3. Calcula los siguientes determinantes de Vandermonde,

a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 49 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 100 & 36 & 9 \\ 10 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 25 & -5 & 1 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$

10.4. Calcula los siguientes determinantes mediante el método de Laplace:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 & -3 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

10.5. Calcula los siguientes determinantes de por el método de Chio.

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 1 & -2 \\ 6 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$e) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 25 & 49 \\ 8 & 27 & 125 & 343 \end{vmatrix}$$

$$f) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

B. EXISTENCIA Y CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA POR DETERMINANTES

10.11. Determina las dos condiciones para que una matriz tenga inversa. Indica, mediante los cálculos oportunos, cuáles de las siguientes matrices tienen inversa y cuáles no,

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$c) C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d) D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$e) E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$f) F = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & -3 \\ 4 & -3 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10.12. Calcula la matriz inversa de cada matriz, en el caso de que exista:

$$a) A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c) C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d) D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$e) E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$f) F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

10.13. Considere la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 2 & k & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Estipula para qué valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ existe la inversa M^{-1} .

b) Para $k = 2$, halla el valor del determinante de la matriz $M^2 \cdot M^T$.

10.14. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$:

a) Determina los valores del parámetro real k para los cuales la matriz A admite matriz inversa A^{-1} .

b) Para $k = 0$, calcula el determinante de la matriz $3 \cdot A^T$.

10.15. Estudiar la existencia de la matriz inversa en función del parámetro k . Para los valores para los que existe inversa, calcular, utilizando determinantes, dicha matriz inversa.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & k \\ k & 2 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & k \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} k & k-1 & -2k \\ 2 & 6 & 8k \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & k & -k \\ 12 & -k-2 & -2 \\ k & -2 & 1 \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -k & 3 \end{pmatrix}$

f) $F = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & k+1 & 3 \\ 1 & k+1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

10.16. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ responde a las siguientes preguntas:

a) Obtén el determinante de A en función de a y halla para qué valores de a existe la matriz inversa A^{-1} .

b) Para $a = 1$, calcula la matriz inversa A^{-1} .

10.17. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 2 & 0 \\ 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Obtén los valores de k para los que la matriz A es regular (posee inversa).

b) Para $k = -1$, calcula el determinante de la matriz $2 \cdot A^{-1}$.

10.18. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ k & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Determina los valores del parámetro real k para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) Para $k = 1$, calcula el determinante de la matriz $2 \cdot A^T$.

10.19. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ 2 & 1 & k \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Estudia la existencia de A^{-1} en función de los valores que tome el parámetro k .

b) Para $k = 1$, calcula el determinante de la matriz inversa A^{-1} y el determinante de la matriz B^2 .

10.20. Calcular la matriz inversa de las siguientes matrices por el método de Gauss-Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

10.20. Determina la matriz X que verifica que $XA + B = I$ con I la matriz identidad de orden 2, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

10.21. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3, resuelve las siguientes ecuaciones matriciales:

$$a) \quad A + BX = 2I \qquad b) \quad XA + B = 2I \qquad c) \quad BX - 2I = A$$

10.22. Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular la matriz X que verifica en cada apartado la ecuación.

$$a) \quad AX = BX + I \qquad b) \quad XA - X = B \qquad c) \quad B^t X + I = 2X$$

10.23. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3, resuelve las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $A \cdot X \cdot B = I$ b) $X \cdot A^{-1} - B = I$ c) $A = X - B^{-1} \cdot X$

10.24. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

a) Calcule algebraicamente la matriz X en la ecuación matricial:

$$AXB - B = A$$

b) Calcule el determinante $|3C \cdot B^{-1}|$, siendo $C = (2A^t)^{-1}$.

10.25. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Responda argumentando su razonamiento y calculando algebraicamente:

a) Calcule la matriz C tal que $(3C^t - I)^{-1} = A$ donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) Calcule, si es posible, la matriz D tal que $D = \frac{A^t \cdot A}{|B^t \cdot B|}$

C. PROPIEDADES DE LAS DETERMINANTES

10.31. Los siguientes determinantes son todos nulos. Explica por qué aplicando exclusivamente las propiedades de los determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & -2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 1 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 8 \\ 6 & 6 & 8 & 12 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 6 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

10.32. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 25$, calcula el valor de $\begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix}$ mediante las propiedades de los determinantes.

10.33. Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$ calcula, sin desarrollar, los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

10.34. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 7$ calcula los siguientes determinantes por las propiedades de los mismos,

a) $\begin{vmatrix} a+2x & b+2y & c+2z \\ p & q & r \\ 2x+p & 2y+q & 2z+r \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -b & c+b & 5a \\ -q & r+q & 5p \\ -y & z+y & 5x \end{vmatrix}$

10.35. Si $\begin{vmatrix} a & 2 & b \\ 0 & 1 & c \\ e & f & 0 \end{vmatrix} = 2$ calcula, sin desarrollar, los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3e & 3f & 0 \\ 2e & 1+2f & c \\ a & 2 & b \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} b & a & 4 \\ c & 0 & 2 \\ 0 & e & 2f \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & 2 & b \\ 0 & 1 & c \\ a+e & 2+f & b \end{vmatrix}$

10.36. Sabiendo que el determinante de la matriz $M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es igual a 5, calcula el valor de los siguientes determinantes aplicando sus propiedades (sin calcular x, y, z):

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ x+3 & y+1 & z \end{vmatrix}$

10.37. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 tales que $\det(A) = -2$ y $\det(B) = 3$.

- a) Calcula justificadamente $\det(A \cdot B)$, $\det(3A)$ y $\det(A^{-1})$.
- b) Si C es una matriz de orden 3 tal que $A \cdot C \cdot B = I$ (donde I es la matriz identidad), halla el valor del determinante de C .

10.38. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden 3 tales que $\det(A) = 4$ y $\det(B) = -1$.

- a) Justifica razonadamente el valor de $\det(A^T \cdot B)$, $\det(2B)$ y $\det(B^{-1})$.
- b) Si X es una matriz de orden 3 que cumple $A \cdot X = B^2$, calcula $|X|$.

10.39. Sea A una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante es $\det(A) = -3$. Calcule, indicando las propiedades de los determinantes que se utilicen en cada paso, el valor de los siguientes determinantes:

- a) $|-2A|$
- b) $\det((A^t)^{-1} \cdot A^2)$
- c) $\det(3A \cdot (2A)^{-1})$

10.40. Considere dos matrices A y B de tamaño 3×3 con determinantes $\det(A) = -3$ y $\det(B) = 10$.

- a) Calcula aplicando las propiedades de los determinantes: $\det(A^2 \cdot B^{-1})$, $\det(-A)$ y $\det((A \cdot B)^T)$.
- b) Si la matriz M satisface la ecuación $B \cdot M \cdot A^T = 3I$ (donde I es la matriz identidad de orden 3), halla el determinante de M .

10.41. Dadas dos matrices cuadradas de orden 3, A y B , cuyos determinantes son $\det(A) = 5$ y $\det(B) = -2$:

- a) Obtén el valor numérico de $\det(A \cdot B^{-1})$, $\det(3B)$ y $\det((A^T)^2)$.
- b) Sabiendo que $A^{-1} \cdot X \cdot B = 2I$, determina el valor del determinante de la matriz X .

10.42. Sean A y B dos matrices inversibles de orden 3 con $\det(A) = -2$ y $\det(B) = 3$.

a) Determina razonadamente $\det(A^3)$, $\det(-2B)$ y $\det(A^{-1} \cdot B^T)$.

b) Si C es una matriz de orden 3 tal que $(A \cdot C)^{-1} = B$, calcula el valor de $\det(C)$.

D. RANGO DE MATRICES MEDIANTE DETERMINANTES

10.51. Estudiar el rango de la matriz A mediante determinantes:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{c) } C = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \\ 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{d) } D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

10.52. Estudiar el rango de la matriz A en cada caso, mediante determinantes, y en función de los distintos valores del parámetro t .

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & t \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & t-2 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix} \quad \text{c) } C = \begin{pmatrix} t & 1 & 3 \\ 2 & t & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

10.53. Estudiar el rango de las siguientes matrices según los distintos valores del parámetro establecido

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ t & 1 & t \\ t & 1 & 3-t \end{pmatrix} & \text{b) } B &= \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 2 \\ 4 & 4 & k \end{pmatrix} & \text{c) } C &= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix} \\ \text{d) } D &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ m & 0 & 1 & 0 \\ 1 & m+1 & m & m+1 \end{pmatrix} & \text{e) } E &= \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 & t \\ 1 & 1 & t & t^2 \end{pmatrix} & \text{f) } F &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & k-1 & 7 \end{pmatrix} \\ \text{h) } H &= \begin{pmatrix} t & 0 & t & 0 \\ 4 & -6 & 8 & -2 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} & \text{g) } G &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

10.54. Considere la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con $m \in \mathbb{R}$.

a) Halla los valores de m para los que $Rg(M) < 3$.

b) Estudia el rango de la matriz M en función de los valores del parámetro m .

E. BASES DE ESPACIOS VECTORIALES

10.61. Estudiar si los siguientes vectores son linealmente independientes

a) $\vec{u}_1 = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{u}_2 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} + 2\vec{t}$, $\vec{u}_3 = 5\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

b) $\vec{v}_1 = (1, 2, 0, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, 4, 3, 1)$, $\vec{v}_3 = (1, 2, 3, 1)$

c) $\vec{v}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 0, 1)$, $\vec{v}_3 = (1, 0, -1, 0)$, $\vec{v}_4 = (1, 0, 0, 1)$

10.610. Determinar cuáles de las siguientes colecciones de vectores son bases en el espacio que se señala,

a) $S_1 = \{\vec{i} - 2\vec{j}, -2\vec{i} + 4\vec{j}\}$ en $\mathbb{R}^2$

b) $S_2 = \{\vec{i} - \vec{j}, 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\}$ en $\mathbb{R}^3$

c) $S_3 = \{(1, 0, 2), (2, 6, 1), (1, 2, 1)\}$ en $\mathbb{R}^3$

d) $S_4 = \{(2, 0, -1, 0), (1, -2, 0, -1), (1, 0, 2, -1), (0, 2, -3, 2)\}$ en $\mathbb{R}^4$

e) $S_5 = \{(1, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 1)\}$ en $\mathbb{R}^4$