CONTROL 5

Análisis y enfoques
Matemáticas I y II

Lunes 18 de DICIEMBRE de 2023

90 minutos

NOMBRE: ____

APELLIDOS:____

Instrucciones para los/as alumnos/as

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a **TODOS los ejercicios y problemas** que se presentan en el cuadernillo.
- Escriba sus respuestas en las hojas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en cada pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede añadir hojas para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de 10 puntos.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 1,25 puntos]

1. Cuatro libros de matemáticas, tres de física y dos de química, todos ellos de editoriales y autores distintos, han de ser colocados en una estantería. Cuántas colocaciones distintas podemos realizar si,

(i) Los libros de cada materia han de estar juntos. (0,5 puntos)

(ii) Los libros de física han de estar separados. (0,75 puntos)

[Puntuación máxima: 2 puntos] **[Matemáticas NM, Mayo 2013 P2, Ej.6]**

2. Utilice la inducción matemática para demostrar que

$$\sum_{r=1}^{n} \boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{r}!) = (\boldsymbol{n}+\mathbf{1})! - \mathbf{1} \quad , \quad \forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$$

[Puntuación máxima: 2 puntos] **(Matemáticas NS, P1 Noviembre 2017, ej.9)**

3. Doce alumnos tienen que presentarse a un examen sobre combinatoria avanzada. El aula donde hacen el examen tiene tres filas de cuatro pupitres cada una, y el profesor encargado de supervisar el examen (el supervisor) se sitúa en la parte delantera del aula, como se muestra en el siguiente diagrama.

SUPERVISOR

Pupitre 1	Pupitre 2	Pupitre 3	Pupitre 4
Pupitre 5	Pupitre 6	Pupitre 7	Pupitre 8
Pupitre 9	Pupitre 10	Pupitre 11	Pupitre 12

(a) Halle el número de maneras en que pueden sentarse los doce alumnos en esta aula.

(0, 5 puntos)

Se sospecha que dos de los alumnos, Helen y Nicky, hicieron trampas en un examen previo.

(b) Halle el número de maneras en que se pueden sentar los alumnos, sabiendo que Helen y Nicky tienen que sentarse una directamente detrás del otra (sin pupitres de por medio). Por ejemplo, Pupitre 5 y Pupitre 9. (0,75 puntos)

(c) Halle el número de maneras en que se pueden sentar los alumnos si Helen y Nicky no deben sentarse una al lado del otra en la misma fila. (0,75 puntos)

[Puntuación máxima: 1,5 puntos] **(Matemáticas NS, P2 Mayo 2018, ej.5)**

4. (i) Simplifique al máximo el número combinatorio $\binom{3n+1}{3n-2}$ y déjelo como un polinomio desarrollado de grado 3 en n. (0,75 puntos)

(ii) A partir de lo anterior, **usando la calculadora,** halle el menor valor de n para el cual

$$\binom{3n+1}{3n-2} > 10^6$$ (0,75 puntos)

[Puntuación máxima: 2 puntos] **[Matemáticas NM, Mayo 2013 P2, Ej.6]**

5. Demostrar mediante inducción matemática que

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ \dots+\binom{n-1}{2}=\binom{n}{3} \quad \text{donde} \quad n\in\mathbb{N},\ n\geq 3$$

Ayuda: Puedes usar la igualdad del triángulo Pascal-Tartaglia, es decir, puedes usar que,

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}\ \ \forall\, n\in\mathbb{N}, \qquad n>k$$

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

6. Las matriculas de los vehículos de un determinado país tienen un número de cuatro cifras de entre 1 y 9 (ambas inclusive) en el que no se repiten cifras, seguido de un código formado por 3 letras de entre las letras que tiene un alfabeto de 28 letras pero en al que hay que quitar 5 vocales.

(i) Calcule el número total de matriculas que se pueden formar con las características anteriores. (0,75 puntos)

(ii) Si se pueden repetir números y letras, calcule el número de matriculas con número capicúa y código palíndromo. (Por ejemplo 1221-PLP). (0,75 puntos)

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS DEL CONTROL Nº5 DE MATEMÁTICAS I

[Puntuación máxima: 1,25 puntos]

1. Cuatro libros de matemáticas, tres de física y dos de química, todos ellos de editoriales y autores distintos, han de ser colocados en una estantería. Cuántas colocaciones distintas podemos realizar si,

(i) Los libros de cada materia han de estar juntos. (0,5 puntos)

(ii) Los libros de física han de estar separados. (0,75 puntos)

(b) Cuatro libros de matemáticas, tres de física y dos de química, todos ellos de editoriales y autores distintos, han de ser colocados en una estantería. Cuántas colocaciones distintas podemos realizar si,

(i) Los libros de cada materia han de estar juntos.

Los libros de matemáticas podrán permutar entre sí (4!), al igual que los de física (3!) y los de química (2!). Igualmente los tres bloques pueden permutar entre sí (3!).

Por lo tanto, el número de colocaciones distintas será:

$$4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 3! = 24 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 6 = 1728\ colocaciones$$

(ii) Los libros de física han de estar separados.

Los libros que no son de física son un total de 6. Las diferentes maneras de colocarlos es una permutación de 6 elementos (6!). Posiciones que abren estos 6 libros son 7 de las que tenemos que elegir 3 posiciones para los libros de física. De ese modo estarán separados. Estas posibilidades son

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{6 \cdot 4!} = 7 \cdot 5 = 35$$

Solo falta ya, permutar a los libros de física entre sí, que no es sino una permutación de 3 elementos (3!).

Por lo tanto, el total de colocaciones que podemos hacer si no queremos que estén los libros de física juntos es,

$$6! \cdot \binom{7}{3} \cdot 3! = 720 \cdot 35 \cdot 6 = \ 151\,200\ colocaciones$$

[Puntuación máxima: 2 puntos] **[Matemáticas NM, Mayo 2013 P2, Ej.6]**

2. Utilice la inducción matemática para demostrar que

$$\sum_{r=1}^{n} \boldsymbol{r \cdot (r!) = (n+1)! - 1 \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}}$$

- **Probamos el caso $\boldsymbol{n = 1}$.**

$$¿\sum_{r=1}^{1} r \cdot (r!) = (1+1)! - 1? \;\Leftrightarrow\; ¿\,1 \cdot 1! = (1+1)! - 1? \;\Leftrightarrow\; 1 = 1 \quad \surd$$

Por lo tanto, el caso $n = 1$ es cierto.

- **Suponemos cierto el caso $\boldsymbol{n = k}$, y probaremos el caso $\boldsymbol{n = k + 1}$**

Consideramos cierto que

$$\sum_{r=1}^{k} r \cdot (r!) = (k+1)! - 1$$

y probaremos que

$$\sum_{r=1}^{k+1} r \cdot (r!) = \big((k+1)+1\big)! - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{r=1}^{k+1} r \cdot (r!) = (k+2)! - 1$$

Aplicando la hipótesis de inducción para el caso $n = k$, obtenemos que,

$$\sum_{r=1}^{k+1} r \cdot (r!) = \sum_{r=1}^{k} \boldsymbol{r \cdot (r!)} + (k+1) \cdot (k+1)! = \boldsymbol{(k+1)! - 1} + (k+1) \cdot (k+1)! =$$

Sacando factor común $(k+1)!$ en el primer y tercer sumando tendremos que,

$$= (k+1)! \cdot (1 + k + 1) - 1 = (k+1)! \cdot (k+2) - 1 = (k+2)! - 1 \quad \surd$$

En conclusión, el caso $r = k + 1$ es cierto si el caso $r = k$ es cierto y, en conclusión, se verifica el método de inducción. Por lo tanto, hemos demostrado que,

$$\sum_{r=1}^{n} r \cdot (r!) = (n+1)! - 1 \quad , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

[Puntuación máxima: 2 puntos] **(Matemáticas NS, P1 Noviembre 2017, ej.9)**

3. Doce alumnos tienen que presentarse a un examen sobre combinatoria avanzada. El aula donde hacen el examen tiene tres filas de cuatro pupitres cada una, y el profesor encargado de supervisar el examen (el supervisor) se sitúa en la parte delantera del aula, como se muestra en el siguiente diagrama.

SUPERVISOR

Pupitre 1	Pupitre 2	Pupitre 3	Pupitre 4
Pupitre 5	Pupitre 6	Pupitre 7	Pupitre 8
Pupitre 9	Pupitre 10	Pupitre 11	Pupitre 12

(a) Halle el número de maneras en que pueden sentarse los doce alumnos en esta aula.

(0, 5 puntos)

Se sospecha que dos de los alumnos, Helen y Nicky, hicieron trampas en un examen previo.

(b) Halle el número de maneras en que se pueden sentar los alumnos, sabiendo que Helen y Nicky tienen que sentarse una directamente detrás del otra (sin pupitres de por medio). Por ejemplo, Pupitre 5 y Pupitre 9. (0,75 puntos)

(c) Halle el número de maneras en que se pueden sentar las alumnos si Helen y Nicky no deben sentarse una al lado del otra en la misma fila. (0,75 puntos)

(a) Halle el número de maneras en que pueden sentarse los doce alumnos en esta aula.

Consiste en permutar sus posiciones. Por lo tanto, el número de maneras de sentarse es,

$$P_{12} = 12! = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 479\,001\,600\, modos$$

(b) Halle el número de maneras en que se pueden sentar los alumnos, sabiendo que Helen y Nicky tienen que sentarse una directamente detrás del otra (sin pupitres de por medio). Por ejemplo, Pupitre 5 y Pupitre 9.

Suponiendo que las alumnas están en las posiciones 5 y 9, los 10 restantes permutarán. Como los modos de elegir pupitres en que una esté detrás de otra son un total de 8 entonces el número de maneras en que se pueden sentar con Helen y Nicky sentadas una detrás de otra son,

$$2 \cdot 8 \cdot P_{10} = 2 \cdot 8 \cdot 10! = 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 58\,060\,800\, modos$$

(c) Halle el número de maneras en que se pueden sentar los alumnos si Helen y Nicky no deben sentarse una al lado del otra en la misma fila.

Razonamos contando las ocasiones en las que Helen y Nicky están juntas y restaremos del total. Suponiendo que las alumnas están en las posiciones 1 y 2, los 10 restantes permutarán. Como los modos de elegir pupitres que uno esté al lado del otro son un total de 9 entonces el número de maneras en que se pueden sentar con Helen y Nicky sentadas una al lado de la otra son,

$$P_{12} - 2 \cdot 9 \cdot P_{10} = 12! - 2 \cdot 9 \cdot 10! = 479\,001\,600 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$
$$= 479\,001\,600 - 65\,318\,400 = 413\,683\,200\, modos$$

[Puntuación máxima: 1,5 puntos] **(Matemáticas NS, P2 Mayo 2018, ej.5)**

4. (i) Simplifique al máximo el número combinatorio $\binom{3n+1}{3n-2}$ y déjelo como un polinomio desarrollado de grado 3 en n. (0,75 puntos)

(ii) A partir de lo anterior, **usando la calculadora,** halle el menor valor de n para el cual

$$\binom{3n+1}{3n-2} > 10^6$$ (0,75 puntos)

(a) (i) Exprese el coeficiente binomial $\boldsymbol{\binom{3n+1}{3n-2}}$ como un polinomio en $\boldsymbol{n}$.

$$\binom{3n+1}{3n-2} = \frac{(3n+1)!}{(3n-2)!\cdot\big((3n+1)-(3n-2)\big)!} = \frac{(3n+1)\cdot 3n\cdot(3n-1)\cdot(3n-2)!}{(3n-2)!\cdot(3n+1-3n+2)!} =$$

$$= \frac{(3n+1)\cdot 3n\cdot(3n-1)}{3!} = \frac{(3n+1)\cdot 3n\cdot(3n-1)}{6} = \frac{(3n+1)\cdot n\cdot(3n-1)}{2} =$$

$$= \frac{(9n^2-1)\cdot n}{2} = \frac{9n^3-n}{2} = \frac{9}{2}\cdot n^3 - \frac{1}{2}\cdot n$$

(ii) A partir de lo anterior, usando la calculadora, halle el menor valor de $\boldsymbol{n}$ para el cual

$$\boldsymbol{\binom{3n+1}{3n-2} > 10^6}$$

Aplicando el apartado a) tendremos que,

$$\frac{9}{2}\cdot n^3 - \frac{1}{2}\cdot n > 1000000 \quad \Leftrightarrow \quad 9n^3 - n > 2000000 \quad \Leftrightarrow \quad 9n^3 - n - 2000000 > 0$$

Como la única solución real de esta ecuación es $n = 60{,}571$, probando en los dos intervalos en que queda dividida la recta real positiva

- $n \in (0, 60´571)$ entonces $9n^3 - n - 2000000 < 0$
- $n = 60´571$ entonces $9n^3 - n - 2000000 = 0$
- $n \in (\,60´571, +\infty)$ entonces $9n^3 - n - 2000000 > 0$

Concluimos que el menor valor para el que $\binom{3n+1}{3n-2} > 10^6$ es $n\ =\ 61$.

[Puntuación máxima: 2 puntos] **[Matemáticas NM, Mayo 2013 P2, Ej.6]**

5. Demostrar mediante inducción matemática que

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ \dots+\binom{n-1}{2}=\binom{n}{3} \quad \text{donde} \quad n\ \in \mathbb{N},\ n\geq 3$$

Ayuda: Puedes usar la igualdad del triángulo Pascal-Tartaglia, es decir, puedes usar que,

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}\ \ \forall\, n\in\mathbb{N}, \qquad n>k$$

Demostrar mediante inducción matemática que $\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ \dots+\binom{n-1}{2}=\binom{n}{3}$ donde $n\ \in \mathbb{N},\ n\geq 3$

- **Probamos el caso $n\ =\ 3$**

$$¿\binom{2}{2}=\binom{3}{3}?$$

Como $\binom{2}{2}=1=\binom{3}{3}$, queda probado el caso n = 3.

- **Suponemos cierto el caso $n\ =\ k$, es decir,** $\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ \dots+\binom{k-1}{2}=\binom{k}{3}$ y **probamos el caso $n=k+1$**

$$¿\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ \dots+\binom{k-1}{2}+\binom{k+1-1}{2}\overset{¿?}{=}\binom{k+1}{3}?$$

Como

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ \dots+\binom{k-1}{2}+\binom{k+1-1}{2}=$$

$$=\left[\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ \dots+\binom{k-1}{2}\right]+\binom{k}{2}=$$

Por la hipótesis de inducción,

$$=\left[\binom{k}{3}\right]+\binom{k}{2}=\binom{k}{3}+\binom{k}{2}$$

Utilizando el $Triángulo\ Pascal-Tartaglia$ o bien, por la ayuda del enunciado,

$$\binom{k}{3}+\binom{k}{2}=\binom{k+1}{3}$$

Por lo tanto, hemos demostrado el caso $n\ =k+1$ a partir del caso $n=k$ por lo que la inducción está completa y podemos afirmar que

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ \dots+\binom{n-1}{2}=\binom{n}{3} \quad \text{donde } n\ \in \mathbb{N},\ n\geq 3$$

[Puntuación máxima: 1,5 puntos]

6. Las matriculas de los vehículos de un determinado país tienen un número de cuatro cifras de entre 1 y 9 (ambas inclusive) en el que no se repiten cifras, seguido de un código formado por 3 letras de entre las letras que tiene un alfabeto de 28 letras pero en al que hay que quitar 5 vocales.

(i) Calcule el número total de matriculas que se pueden formar con las características anteriores. (0,75 puntos)

(ii) Si se pueden repetir números y letras, calcule el número de matrículas con número capicúa y código palíndromo. (Por ejemplo 1221-PLP). (0,75 puntos)

(i) Calcule el número total de matriculas que se pueden formar con las características anteriores.

El número total será la multiplicación del total de números de cuatro cifras y del total de códigos de tres letras.

El total de números es una variación ordinaria sin repetición de 9 elementos tomados de cuatro en cuatro.

$$V_{9,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3\,024$$

El total de códigos de tres letras es una variación ordinaria con repetición de 28 – 5 = 23 elementos tomados de tres en tres.

$$VR_{23,3} = 23^3 = 12\,167$$

Por lo tanto, el total de matriculas serán,

$$V_{9,4} \cdot VR_{23,3} = 3\,024 \cdot 12\,167 = 36\,793\,008\, matrículas$$

(ii) Si se pueden repetir números y letras, calcule el número de matrículas con número capicúa y código palíndromo. (Por ejemplo 1221-PLP).

El número total será la multiplicación del total de números capicúas y del total de códigos de palíndromos.

El total de números es una variación ordinaria sin repetición de 9 elementos tomados de dos en dos.

$$VR_{9,2} = 9^2 = 81$$

El total de códigos de tres letras es una variación ordinaria con repetición de 28 – 5 = 23 elementos tomados de dos en dos.

$$VR_{23,2} = 23^2 = 529$$

Por lo tanto, el total de matriculas serán,

$$VR_{9,2} \cdot VR_{23,2} = 81 \cdot 529 = 42\,849\ matrículas\ capicuas - palindromas$$