CONTROL 4

Análisis y enfoques
Matemáticas I y II

Lunes 4 de DICIEMBRE de 2023

90 minutos

NOMBRE: ____

APELLIDOS:____

Instrucciones para los/as alumnos/as

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a **<u>TODOS los ejercicios y problemas</u>** que se presentan en el cuadernillo.
- Escriba sus respuestas en las hojas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en cada pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede añadir hojas para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de 10,25 puntos.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

[Puntuación máxima: 1,25 puntos] **(Matemáticas NM Noviembre 2009,ej.1)**

(Matemáticas NM Noviembre 2010,ej.1)

1. Los tres primeros términos de una progresión geométrica infinita son $32, 16\ y\ 8$.

(a) Escriba el valor de r. (0,25 puntos)

(b) Halle el décimo término de la sucesión. (0,25 puntos)

(c) Halle la suma de los infinitos términos de esta progresión. (0,25 puntos)

En una progresión aritmética, $S_{40} = 1900$ y $u_{40} = 106$.

(d) Halle el valor de u_1 y el de d. (0,5 puntos)

[Puntuación máxima: 1 punto] **(Matemáticas NS P1 ej.6 Mayo 2013)**

2. En una progresión geométrica, el primer término es a, la razón común es r y la suma de los infinitos términos es igual a 76. En una segunda progresión geométrica, el primer término es a, la razón común es r^3 y la suma de los infinitos términos es igual a 36.

Halle r. (1 punto)

[Puntuación máxima: 1,5 puntos] **(Matemáticas NM Noviembre 2015,ej.7)**

(Matemáticas NS Mayo 2018,ej.2)

3. (a) En una progresión aritmética el primer término es $\ln a$ y la diferencia es $ln\ 3$. El 13.° término de la progresión es $8ln9$. Halle el valor de a. (0,75 puntos)

(b) Resuelva la ecuación $8^{x-1} = 6^{3x}$. Exprese la respuesta en función de $ln\ 2$ y $ln3$.

(0,75 puntos)

[Puntuación máxima: 2,5 puntos] **(Matemáticas NS Mayo 2007, ej.4)**

4. (a) Resuelva algebraicamente, mediante cambio de variable, $2(\ln x)^2 = 3\ln x - 1$. De la respuesta de forma exacta. (1 punto)

(b) Resuelva el siguiente sistema algebraicamente (1,5 puntos)

$$\left.\begin{array}{c} 2\log_3 x + \log_3 y = 3 \\ \dfrac{2^{x-6}}{2^{3y+2}} = 1 \end{array}\right\}$$

[Puntuación máxima: 2 puntos]

5. (a) Opera mediante notación radical y simplifica al máximo: (1 punto)

$$\sqrt[7]{2\cdot\sqrt[6]{2}}+\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}-2\sqrt[12]{4}$$

(b) (i) Johann invierte su dinero, 1500 € en un depósito con interés anual simple al 4 %, hasta conseguir que se duplique. ¿Cuánto tiempo tardará en ello? (0,5 puntos)

(ii) Sarah, amiga de Johann, invierte el mismo capital en otro depósito, esta vez con un interés compuesto al 4 % anual, hasta lograr tener la misma cantidad de dinero que Johann. ¿Cuánto tiempo tardará en ello? (0,5 puntos)

[Puntuación máxima: 2 puntos]

6. (a) Calcula algebraicamente (0,5 + 0,75 puntos)

$$a1)\quad \sum_{k=5}^{13} 3^{k+1} \qquad\qquad a2)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^n}{2^{2n}+1}\right)^{2^{2n}} \qquad (*)\ Haz\ el\ cambio\ de\ variable\ k=2^n$$

(b) Calcula algebraicamente todos los valores de "a" para los que se cumpla que, (0,75 puntos)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(an+5)^2}{\big((a-2)\cdot n+1\big)\cdot\big((a-2)\cdot n-1\big)}=4$$

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS Y PROBLEMAS DEL CONTROL NÚMERO 4 DE ANÁLISIS Y ENFOQUES

[Puntuación máxima: 1,25 puntos] **(Matemáticas NM Noviembre 2009,ej.1)**

(Matemáticas NM Noviembre 2010,ej.1)

1. Los tres primeros términos de una progresión geométrica infinita son $32, 16\ y\ 8$.

(a) Escriba el valor de r. (0,25 puntos)

(b) Halle el décimo término de la sucesión. (0,25 puntos)

(c) Halle la suma de los infinitos términos de esta progresión. (0,25 puntos)

En una progresión aritmética, $S_{40} = 1900$ y $u_{40} = 106$.

(d) Halle el valor de u_1 y el de d. (0,5 puntos)

(a) Escriba el valor de r. **(0,25 puntos)**

Si $\{a_n\}$ es la progresión geométrica tendremos que

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

(b) Halle el décimo término de la progresión. **(0,25 puntos)**

Mediante el término general de la progresión geométrica tendremos que,

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad \Rightarrow \quad a_{10} = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1} = 2^5 \cdot \left(\frac{1}{2^9}\right) = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

(c) Halle la suma de los infinitos términos de esta progresión. **(0,25 puntos)**

Puesto que la razón está entre 0 y 1 tendremos que,

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{32}{1-\frac{1}{2}} = \frac{32}{\frac{1}{2}} = 64$$

(d) Halle el valor de u_1 y el de d. **(0,5 puntos)**

Como $S_{40} = 1900$ entonces,

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)\cdot n}{2} \quad \Leftrightarrow \quad S_{40} = \frac{(u_1 + u_{40})\cdot 40}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 1900 = \frac{(u_1 + 106)\cdot 40}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1900 \cdot 2}{40} = u_1 + 106 \quad \Leftrightarrow \quad 95 = u_1 + 106 \quad \Leftrightarrow \quad 95 - 106 = u_1$$

$$\Leftrightarrow \ -11 = u_1$$

Como $u_{40} = 106$ y $-11 = u_1$ entonces,

$$u_n = u_1 + (n-1)\cdot d \quad \Leftrightarrow \quad u_{40} = u_{40} + (40-1)\cdot d \quad \Leftrightarrow \quad 106 = -11 + (40-1)\cdot d$$

Por lo tanto,

$$\Leftrightarrow \quad 106 = -11 + 39 \cdot d \quad \Leftrightarrow \quad 106 + 11 = 39 \cdot d \quad \Leftrightarrow \quad 117 = 39 \cdot d \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{117}{39} = d \quad \Leftrightarrow \quad 3 = d$$

[Puntuación máxima: 1 punto] **(Matemáticas NS P1 ej.6 Mayo 2013)**

2. En una progresión geométrica, el primer término es a, la razón común es r y la suma de los infinitos términos es igual a 76. En una segunda progresión geométrica, el primer término es a, la razón común es r^3 y la suma de los infinitos términos es igual a 36.

Halle r. (1 punto)

De la primera progresión geométrica de primer término a, con razón común r y suma de los infinitos términos es igual a 76 obtenemos la ecuación,

$$\frac{a}{1-r} = 76 \quad \Leftrightarrow \quad a = 76 \cdot (1-r)$$

De la segunda progresión geométrica de primer término a, con razón común r^3 y suma de los infinitos términos es igual a 36 obtenemos la ecuación,

$$\frac{a}{1-r^3} = 36 \quad \Leftrightarrow \quad a = 36 \cdot (1-r^3)$$

Igualando ambas ecuaciones obtenemos que,

$$76 \cdot (1-r) = 36 \cdot (1-r^3)$$

De donde,

$$76 - 76r = 36 - 36r^3 \quad \Leftrightarrow \quad 36r^3 - 76r + 40 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9r^3 - 19r + 10 = 0$$

Aplicando la *método de Rufini* para resolver la ecuación,

$$\begin{array}{c|cccc} & +9 & 0 & -19 & +10 \\ +1 & & +9 & +\ 9 & -10 \\ \hline & +9 & +9 & -10 & 0 \end{array}$$

Resolvemos la ecuación cociente,

$$9r^2 + 9r - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-10)}}{2 \cdot 9} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 360}}{18} =$$

$$= \frac{-9 \pm \sqrt{441}}{18} == \frac{-9 \pm 21}{18} = \begin{cases} r_2 = \dfrac{-9+21}{18} = \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3} \\ r_3 = \dfrac{-9-21}{18} = -\dfrac{30}{18} = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Como para que se pueda efectuar la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica la razón tiene que tener valor entre -1 y +1 entonces el único valor válido para r es,

$$r = \frac{2}{3}$$

[Puntuación máxima: 1,5 puntos] **(Matemáticas NM Noviembre 2015,ej.7)**

(Matemáticas NS Mayo 2018,ej.2)

3. (a) En una progresión aritmética el primer término es $\ln a$ y la diferencia es $ln\ 3$. El 13.º término de la progresión es $8 \cdot ln9$. Halle el valor de a. (0,75 puntos)

(b) Resuelva la ecuación $8^{x-1} = 6^{3x}$. Exprese la respuesta en función de $ln\ 2$ y $ln3$.

(0,75 puntos)

(a) En una progresión aritmética el primer término es $\boldsymbol{lna}$ y la diferencia es $\boldsymbol{ln\ 3}$. El 13.º término de la progresión es $\boldsymbol{8ln9}$. Halle el valor de $\boldsymbol{a}$.

Sabiendo que la progresión aritmética es de tal modo que $u_1 = \ln a$, $r = \ln 3$ y $u_{13} = 8\ln 9$ tendremos que,

$$u_{13} = u_1 + (13-1)\cdot d \quad \Leftrightarrow \quad 8\ln 9 = \ln a + 12\cdot \ln 3$$

Resolvemos el valor de a,

$$8\ln 9 = \ln a + 12\cdot\ln 3 \quad \Leftrightarrow \quad 8\ln 3^2 = \ln a + \ln 3^{12} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(3^2)^8 = \ln(a\cdot 3^{12}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln 3^{16} = \ln(a\cdot 3^{12}) \quad \Leftrightarrow \quad 3^{16} = a\cdot 3^{12} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3^{16}}{3^{12}} = a \quad \Leftrightarrow \quad a = 3^4 \quad \Leftrightarrow \quad a = 81$$

(b) Resuelva la ecuación $\boldsymbol{8^{x-1} = 6^{3x}}$. Exprese la respuesta en función de $\boldsymbol{ln\ 2}$ y $\boldsymbol{ln3}$.

Tomando logaritmos neperianos y aplicando las propiedades de los logaritmos,

$$8^{x-1} = 6^{3x} \quad \Leftrightarrow \quad ln\ 8^{x-1} = ln\ 6^{3x} \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)\cdot ln\ 8 = 3x\cdot ln\ 6 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-1)\cdot ln\ 2^3 = 3x\cdot ln\ (2\cdot 3) \quad \Leftrightarrow \quad 3(x-1)\cdot ln\ 2 = 3x\cdot(ln2 + ln3) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (3x-3)\cdot\ln 2 = 3x\cdot\ln 2 + 3x\cdot ln3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x\cdot ln\ 2 - 3\ln 2 = 3x\cdot\ln 2 + 3x\cdot ln3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -3\ln 2 = 3x\cdot\ln 3 \quad \Leftrightarrow \quad -\ln 2 = x\cdot\ln 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{\ln 2}{\ln 3} = x$$

[Puntuación máxima: 2,5 puntos] **(Matemáticas NS Mayo 2007, ej.4)**

4. (a) Resuelva algebraicamente, mediante cambio de variable, $2(\ln x)^2 = 3\ln x - 1$. De la respuesta de forma exacta. (1 punto)

(b) Resuelva el siguiente sistema algebraicamente (1,5 puntos)

$$\left.\begin{array}{c} 2\log_3 x + \log_3 y = 3 \\ \dfrac{2^{x-6}}{2^{3y+2}} = 1 \end{array}\right\}$$

(a) Resuelva algebraicamente, mediante cambio de variable, $2(\ln x)^2 = 3\ln x - 1$. De la respuesta de forma exacta.

El cambio de variable es $t = ln\, x$. Mediante este cambio se transforma la ecuación en una ecuación polinómica de segundo grado.

$$2(\ln x)^2 = 3\ln x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2 = 3t - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2 - 3t + 1 = 0$$

Resolvemos la ecuación resultante mediante la fórmula de la ecuación polinómica de segundo grado,

$$2t^2 - 3t + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} =$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} t = \dfrac{3+1}{4} = 1 \\ t = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Deshacemos el cambio de variable,

- Si $t = 1$ entonces

$$ln\, x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^1 = e$$

- Si $t = \frac{1}{2}$ entonces

$$ln\, x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{\frac{1}{2}} = +\sqrt{e}$$

Por lo tanto, las soluciones son $x = e$ y $x = \sqrt{e}$

(b) Resuelva el siguiente sistema algebraicamente **(1,5 punto)**

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{2\log_3 x + \log_3 y = 3} \\ \dfrac{\mathbf{2^{x-6}}}{\mathbf{2^{3y+2}}} = \mathbf{1} \end{array}\right\}$$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos en la primera ecuación y eliminamos las potencias en la segunda ecuación igualando potencias de la misma base,

$$\left.\begin{array}{c} 2\log_3 x + \log_3 y = 3 \\ \dfrac{2^{x-6}}{2^{3y+2}} = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} \log_3 x^2 + \log_3 y = 3 \\ 2^{x-6} = 2^{3y+2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} \log_3(x^2 y) = 3 \\ x - 6 = 3y + 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} x^2 y = 3^3 \\ x = 3y + 8 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema sustituyendo el valor despejado de x de la segunda ecuación en la primera ecuación,

$$\left.\begin{array}{r} x^2y = 3^3 \\ x = 3y + 8 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \quad (3y+8)^2 \cdot y = 27 \quad \Leftrightarrow \quad (9y^2 + 48y + 64) \cdot y = 27 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 9y^3 + 48y^2 + 64y - 27 = 0$$

Aplicando el método de Ruffini,

	+9	+48	+64	−27
$\frac{1}{3}$		+3	+17	+27
	+9	+51	+81	0

Por lo tanto, una solución es $x = \frac{1}{3}$. Resolvemos la ecuación polinómica resultante de igualar a cero el resto de la división,

$$9y^2 + 51y + 81 = 0 \;\Leftrightarrow\; 3y^2 + 17y + 27 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 3 \cdot 27}}{2 \cdot 3} =$$

$$= \frac{-17 \pm \sqrt{289 - 324}}{6} \notin \mathbb{R}$$

Por lo tanto, no hay más soluciones para el valor de y. Buscamos el valor de x mediante el despeje efectuado al comienzo,

$$x = 3y + 8 = 3 \cdot \frac{1}{3} + 8 = 1 + 8 = 9$$

Por lo tanto, la única solución del sistema es $x = 9$ $y = \frac{1}{3}$.

[Puntuación máxima: 2 puntos]

5. (a) Opera mediante notación radical y simplifica al máximo: (1 punto)

$$\sqrt[7]{2\cdot\sqrt[6]{2}}+\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}-2\sqrt[12]{4}$$

(b) (i) Johann invierte su dinero, 1500 € en un depósito con interés anual simple al 4 %, hasta conseguir que se duplique. ¿Cuánto tiempo tardará en ello? (0,5 puntos)

(ii) Sarah, amiga de Johann, invierte el mismo capital en otro depósito, esta vez con un interés compuesto al 4 % anual, hasta lograr tener la misma cantidad de dinero que Johann. ¿Cuánto tiempo tardará en ello? (0,5 puntos)

(a) Opera mediante notación radical y simplifica al máximo:

$$\boldsymbol{\sqrt[7]{2\cdot\sqrt[6]{2}}+\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}-2\sqrt[12]{4}}$$

Aplicando las propiedades de los radicales,

$$\sqrt[7]{2\cdot\sqrt[6]{2}}+\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}-2\sqrt[12]{4}=\sqrt[7]{\sqrt[6]{2\cdot 2^6}}+\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt{2}}-2\sqrt[12]{2^2}=\sqrt[42]{2^7}+\frac{\sqrt[6]{2^4}}{\sqrt[6]{2^3}}-2\sqrt[6]{2}=$$

$$=\sqrt[6]{2}+\sqrt[6]{2}-2\sqrt[6]{2}=0$$

(b) (i) Johann invierte su dinero, 1500 € en un depósito con interés anual simple al 4 %, hasta conseguir que se duplique. ¿Cuánto tiempo tardará en ello?

Johann quiere conseguir unos intereses de $I = 1500$ €. En tal caso,

$$I=\frac{C\cdot r\cdot t}{100}\quad\Leftrightarrow\quad 1500=\frac{1500\cdot 4\cdot t}{100}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{1500\cdot 100}{1500\cdot 4}=t\quad\Leftrightarrow\quad t=25\ años$$

(ii) Sarah, amiga de Johann, invierte el mismo capital en otro depósito, esta vez con un interés compuesto al 4 % anual, hasta lograr tener la misma cantidad de dinero que Johann. ¿Cuánto tiempo tardará en ello?

Sarah quiere conseguir unos intereses de $I = 1500$ € y, por lo tanto, un capital final de $C_f = 3000$ €. En tal caso,

$$C_f=C_i\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t\ \Leftrightarrow\ 3\,000=1\,500\cdot\left(1+\frac{4}{100}\right)^t\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{3\,000}{1\,500}=1{,}04^t\quad\Leftrightarrow\quad 2=1{,}04^t$$

Aplicamos logaritmos decimales,

$$\Leftrightarrow\ \log 2=\log 1{,}04^t\ \Leftrightarrow\ \log 2=t\cdot\log 1{,}04\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\log 2}{\log 1{,}04}=t\ \Leftrightarrow\ t\approx 17{,}673\ años$$

[Puntuación máxima: 1,75 puntos]

6. (a) Calcula algebraicamente, (0,5 + 0,75 puntos)

$$a1)\quad \sum_{k=5}^{13} 3^{k+1} \qquad\qquad a2)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^n}{2^{2n}+1}\right)^{2^{2n}} \qquad (*)\ \textit{Haz el cambio de variable } k=2^n$$

(b) Calcula algebraicamente todos los valores de “a” para los que se cumpla que, (0,75 puntos)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(an+5)^2}{\big((a-2)\cdot n+1\big)\cdot\big((a-2)\cdot n-1\big)}=4$$

6. (a1) Calcula algebraicamente,

$$\sum_{k=5}^{13} \mathbf{3^{k+1}}$$

Se trata de la suma de los términos desde el quinto hasta el décimo tercero de una progresión geométrica de razón r = 3.

$$\sum_{k=5}^{13} 3^{k+1} = 3^{5+1}+3^{6+1}+3^{7+1}+\ldots+3^{13+1} = 3^6+3^7+3^8+\ldots+3^{14}$$

Aplicamos la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica,

$$\sum_{k=5}^{13} 3^{k+1} = \frac{3^{14}\cdot 3-3^6}{3-1} = \frac{3^{15}-3^6}{2} = 7\ 174\ 089$$

$$\boldsymbol{a2)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^n}{2^{2n}+1}\right)^{2^{2n}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{(2^2)^n}{2^{2n}+1}\right)^{2^{2n}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{(2^n)^2}{(2^n)^2+1}\right)^{(2^n)^2} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k^2}{k^2+1}\right)^{k^2}$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k^2}{k^2+1}\right)^{k} = e^{\lim_{k\to\infty} k^2\cdot\left(\frac{k^2}{k^2+1}-1\right)} = e^{\lim_{k\to\infty} k^2\cdot\left(\frac{k^2}{k^2+1}-\frac{k^2+1}{k^2+1}\right)} = e^{\lim_{k\to\infty} k^2\cdot\left(\frac{-1}{k^2+1}\right)} = e^{\lim_{k\to\infty}\frac{-k^2}{k^2+1}} =$$

$$= e^{\lim_{k\to\infty}\frac{-k^2}{k^2}} = e^{\lim_{k\to\infty} -1} = e^{-1}$$

(b) Calcula algebraicamente todos los valores de “a” para los que se cumpla que,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(an+5)^2}{\big((a-2)\cdot n+1\big)\cdot\big((a-2)\cdot n-1\big)}=4$$

Como,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(an+5)^2}{\big((a-2)\cdot n+1\big)\cdot\big((a-2)\cdot n-1\big)} = \lim_{n\to\infty}\frac{a^2n^2+25+10an}{(a-2)^2\cdot n^2-1} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{a^2 n^2}{(a-2)^2 \cdot n^2} = \frac{a^2}{(a-2)^2}$$

Por lo tanto,

$$\frac{a^2}{(a-2)^2} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 4 \cdot (a-2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 4 \cdot (a^2 + 4 - 4a) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 = 4a^2 + 16 - 16a \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 3a^2 - 16a + 16$$

Resolvemos la ecuación polinómica de segundo grado,

$$3a^2 - 16a + 16 = 0 \;\Leftrightarrow\; a = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 16}}{2 \cdot 3} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 192}}{6} =$$

$$= \frac{16 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{16 \pm 8}{6} = \begin{cases} a = \dfrac{16+8}{6} = 4 \\ a = \dfrac{16-8}{6} = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$