# CONTROL 2

## Análisis y enfoques
## Matemáticas I y II

Lunes 06 de NOVIEMBRE de 2023

90 minutos

---

**NOMBRE:** ______________________________________________

**APELLIDOS:**______________________________________________



---

**Instrucciones para los/as alumnos/as**

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a **TODOS los ejercicios y problemas** que se presentan en el cuadernillo.
- Escriba sus respuestas en las hojas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en cada pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede añadir hojas para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de 10 puntos.
- La entrega de este cuadernillo un día después de la fecha límite de entrega supone la división del total de la nota obtenida entre 2. Si se produce esta entrega 2 días después de la fecha límite, se realizará la división de la nota total entre 3 y así sucesivamente. Es decir,

$$Nota\ def. = \ Notal\ total/(Días\ de\ retraso + 1)$$

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

**SECCIÓN ÚNICA**

**[Puntuación máxima: 1 punto]** **(Análisis y Enfoques NS P2, Noviembre 2021 ej 2)**

**1.** En una progresión aritmética, el primer término es $60$ y la diferencia común es $-2{,}5$.

(a) Sabiendo que el término $k-ésimo$ de la progresión es cero, halle el valor de $k$.(0,5 puntos)

Sea $S_k$ la suma de los $k$ primeros términos de la progresión ($k$ el del apartado anterior)

(b) Halle el valor de $S_k$ (0,5 puntos)

**[Puntuación máxima: 1,75 puntos]**

**2. a)** Se considera el sumatorio,

$$\sum_{k=5}^{23}(5 \cdot 2^{-k})$$

calcule algebraicamente el valor correcto a que da lugar. (0,75 puntos)

**b)** Ahora considere la siguiente suma

$$6{,}3 + 7{,}2 + 8{,}1 + \ldots + 28{,}8 + 29{,}7 + 30{,}6$$

donde cada término se obtiene del anterior sumando cierta cantidad constante. Calcule dicha cantidad constante, el número de sumandos y el valor de la suma.

(0,25 + 0,5 + 0,25 puntos)

**[Puntuación máxima: 2,5 puntos]**

**3.** Resuelve algebraicamente los siguientes límites, (0,75 + 0,75 + 1 puntos)

$$(a)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2}{(3n+2)\cdot(n-2)} \qquad (b)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{4n^2+1}+\sqrt{9n^2-1}} \qquad (c)\quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3}{n^3+3n}\right)^{n^2}$$

**[Puntuación máxima: 3 puntos]**

**4.** Resuelva algebraicamente de modo correcto, (1,5 + 1,5 puntos)

$a)\ 3^{2x-2}+3^{x-1}=12$

$b)\ \left.\begin{array}{r}\log_5 x-\log_5 y=1\\ \log x+\log y=4\end{array}\right\}$

**[Puntuación máxima: 1,75 puntos]** **(Matemáticas NS P2, Mayo 2019, ej.1)**

**5.** Una máquina para triturar vehículos está rota y cada vez que se enciende su tiempo de funcionamiento es las dos terceras partes que la anterior vez que se puso en marcha. Si la cuarta vez que se puso en marcha tardó en dejar de funcionar 36 minutos.

(a) Calcule el tiempo que tardó en pararse la primera vez que se puso en marcha. (0,5 puntos)

(b) Estimamos que el tiempo que tardaremos en triturar todos los vehículos que tenemos es 6 horas. Con esta sola máquina defectuosa, demuestre matemáticamente que podremos hacer la tarea completa mediante operaciones matemáticas coherentes. (0,5 puntos)

(c) Estime el número mínimo de veces que habrá que encender la máquina para acometer la tarea completa en 6 horas. (0,75 puntos)

**SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS Y EJERCICIOS DEL CONTROL 2**

**ANALISIS Y ENFOQUES – MATEMÁTICAS I**

**[Puntuación máxima: 1 punto]** **(Análisis y Enfoques NS P2, Noviembre 2021 ej 2)**

**1.** En una progresión aritmética, el primer término es 60 y la diferencia común es $-2{,}5$.

(a) Sabiendo que el término $k-ésimo$ de la progresión es cero, halle el valor de $k$.(0,5 puntos)

Sea $S_k$ la suma de los $k$ primeros términos de la progresión ($k$ el del apartado anterior)

(b) Halle el valor de $S_k$ (0,5 puntos)

**(a) Sabiendo que el término $k-ésimo$ de la progresión es cero, halle el valor de $k$.**

Sea la progresión aritmética $\{a_n\}$ donde $a_1 = 60$ y la diferencia común es $d = -2{,}5$. El término general de dicha progresión vendrá dado por,

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por lo que,

$$a_n = 60 + (n-1)\cdot(-2{,}5) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En tal caso, si $a_k = 0$ entonces,

$$a_k = 60 + (k-1)\cdot(-2{,}5)$$

Por lo tanto,



$$0 = 60 + (k-1)\cdot(-2{,}5) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 60 - 2{,}5k + 2{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad 2{,}5k = 62{,}5 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad k = \frac{62{,}5}{2{,}5} \quad \Leftrightarrow \quad k = 25$$

**(b) Halle el valor de $S_k$**

$$S_k = \frac{(a_1 + a_k)\cdot k}{\mathbf{2}} = \frac{(60+0)\cdot 25}{\mathbf{2}} = 750$$

**[Puntuación máxima: 1,75 puntos]**

**2. a)** Se considera el sumatorio,

$$\sum_{k=5}^{23}(5\cdot 2^{-k})$$

calcule el valor correcto a que da lugar. (0,75 puntos)

**b)** Ahora considere la siguiente suma

$$6{,}3+7{,}2+8{,}1+\ldots+28{,}8+\ 29{,}7+\ 30{,}6$$

donde cada término se obtiene del anterior sumando cierta cantidad constante. Calcule dicha cantidad constante, el número de sumandos y el valor de la suma.

(0,25 + 0,5 + 0,25 puntos)

**a) Se considera el sumatorio,**

$$\boldsymbol{\sum_{k=5}^{23}(5\cdot 2^{-k})}$$

**calcule el valor correcto a que da lugar.**



Como

$$\sum_{k=5}^{23}(5\cdot 2^{-k})=\frac{5}{2^5}+\frac{5}{2^6}+\frac{5}{2^7}+\ldots+\frac{5}{2^{21}}+\frac{5}{2^{22}}+\frac{5}{2^{23}}$$

entonces se trata de una progresión geométrica de razón, primer término y último término,



$$r=\frac{1}{2}\quad,\quad a_1=\frac{5}{2^{23}}\quad,\quad a_{19}=\frac{5}{2^{23}}$$

En tal caso, la suma vendrá dada por la fórmula,

$$\sum_{k=5}^{23}(5\cdot 2^{-k})=\frac{a_{23}\cdot r-a_5}{r-1}=\frac{\frac{5}{2^{23}}\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{2^5}}{\frac{1}{2}-1}=\frac{\frac{5}{2^{24}}-\frac{5}{2^5}}{\frac{1}{2}-\frac{2}{2}}=$$

$$=\frac{\frac{5}{2^{24}}-\frac{5\cdot 2^{19}}{2^{24}}}{-\frac{1}{2}}=\frac{10\cdot(2^{19}-1)}{2^{24}}\approx 0´312499404\ldots$$

**b) Ahora considere la siguiente suma**

$$\boldsymbol{6{,}3+7{,}2+8{,}1+\ldots+28{,}8+\ 29{,}7+\ 30{,}6}$$

**donde cada término se obtiene del anterior sumando cierta cantidad constante. Calcule dicha cantidad constante, el número de sumandos y el valor de la suma.**

Se trata de una progresión aritmética. El valor constante que se suma es la diferencia y se puede calcular a partir de los dos primeros sumandos mediante, la resta de sus valores según,

$$d=7{,}2-6{,}3=0{,}9$$

Al ser una progresión aritmética entonces, si $a_n$ es el último término de la progresión entonces,

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \quad \Leftrightarrow \quad 30{,}6 = 6{,}3 + (n-1)\cdot 0{,}9$$

Y de ahí podemos calcular la posición del último término y, por lo tanto, el número de términos,

$$30{,}6 = 6{,}3 + (n-1)\cdot 0{,}9 \quad \Leftrightarrow \quad 30{,}6 - 6{,}3 = (n-1)\cdot 0{,}9 \quad \Leftrightarrow \quad 24{,}3 = (n-1)\cdot 0{,}9 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{24{,}3}{0{,}9} = n-1 \quad \Leftrightarrow \quad 27 = n-1 \quad \Leftrightarrow \quad 27+1 = n \quad \Leftrightarrow \quad 28 = n$$

Por lo tanto, el valor de la suma vendrá dado mediante la fórmula,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$$

En la que sustituyendo,

$$S_{28} = \frac{(a_1 + a_{28})\cdot 28}{2} = \frac{(6{,}3 + 30{,}6)\cdot 28}{2} = \frac{36{,}9\cdot 28}{2} = 516{,}6$$

**[Puntuación máxima: 2,5 puntos]**

**3.** Resuelve algebraicamente los siguientes límites, (0,75 + 0,75 + 1 puntos)

$$(a)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{(3n+2)\cdot(n-2)} \qquad (b)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{4n^2+1}+\sqrt{9n^2-1}} \qquad (c)\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^3+3n}\right)^{n^2}$$

$$(\boldsymbol{a})\quad \lim_{n\to\infty}\frac{(\boldsymbol{2n+1})^2}{(\boldsymbol{3n+2})\cdot(\boldsymbol{n-2})} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+1+4n}{3n^2-6n+2n-4} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+1+4n}{3n^2-4n-4} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{3n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

$$(\boldsymbol{b})\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{4n^2+1}+\sqrt{9n^2-1}} \overset{\infty/\infty}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{4n^2}+\sqrt{9n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{5n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$



$$(\boldsymbol{c})\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3}{n^3+3n}\right)^{n^2} \overset{1^\infty}{=} e^{\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\left(\frac{n^3}{n^3+3n}-1\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\left(\frac{n^3-n^3-3n}{n^3+3n}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\left(\frac{-3n}{n^3+3n}\right)} =$$

$$= e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-3n^3}{n^3+3n}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-3n^3}{n^3}\right)} = e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-3}{1}\right)} = e^{-3}$$

**[Puntuación máxima: 3 puntos]**

**4.** Resuelva algebraicamente de modo correcto, (1,5 + 1,5 puntos)

$$a)\ 3^{2x-2}+3^{x-1}=12 \qquad\qquad b)\ \left.\begin{array}{c}\log_5 x-\log_5 y=1\\ \log x+\log y=4\end{array}\right\}$$

$\boldsymbol{a)}$ $\mathbf{3^{2x-2}+3^{x-1}=12}$

Como,

$$3^{2x-2}+3^{x-1}=12 \iff \frac{3^{2x}}{3^2}+\frac{3^x}{3}=12 \iff \frac{(3^x)^2}{3^2}+\frac{3^x}{3}=12$$

Hacemos el cambio,

$$t=3^x$$

Y por tanto,

$$\frac{(3^x)^2}{3^2}+\frac{3^x}{3}=12 \iff \frac{t^2}{3^2}+\frac{t}{3}=12$$



Resolvemos la ecuación de segundo grado,

$$\frac{t^2}{3^2}+\frac{t}{3}=12 \iff t^2+3t=108 \iff t^2+3t-108=0 \iff$$

$$\iff t=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-108)}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm\sqrt{9+432}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{441}}{2}=\frac{-3\pm21}{2}$$

$$\iff \begin{cases} t=\dfrac{-3+21}{2}=9\\ t=\dfrac{-3-21}{2}=-12\end{cases}$$

Por lo tanto,

- Si $t=9$ entonces,

$$t=9 \iff 3^x=9 \iff 3^x=3^2 \iff x=2$$

- Si $t=-12$ entonces,

$$t=-12 \iff 3^x=-12 \iff \textit{No existe solución para } x$$

Por tanto, la única solución es $x=2$.

$b)$ $\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{\log_5 x - \log_5 y = 1}\\ \boldsymbol{log\ x + \log y = 4}\end{array}\right\}$

Tomando la función arcotangente en la primera ecuación,

$$\left.\begin{array}{r}\log_5 x - \log_5 y = 1\\ log\ x + \log y = 4\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}\log_5\left(\dfrac{x}{y}\right) = 1\\ log\ (xy) = 4\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}\dfrac{x}{y} = 5^1\\ xy = 10^4\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}x = 5y\\ xy = 10000\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

Aplicando el método de sustitución,

$$\left.\begin{array}{r}x = 5y\\ xy = 10000\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}x = 5y\\ (5y)\cdot y = 10000\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}x = 5y\\ 5y^2 = 10000\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}x = 5y\\ y^2 = 2000\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

Es decir,

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}x = 5y\\ y = \sqrt{2000}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}x = 5y\\ y = 10\cdot\sqrt{20}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}x = 100\cdot\sqrt{5}\\ y = 20\cdot\sqrt{5}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r}x \approx 223{,}61\\ y \approx 44{,}72\end{array}\right\}$$

**[Puntuación máxima: 1,75 puntos]**

**5.** Una máquina para triturar vehículos está rota y cada vez que se enciende su tiempo de funcionamiento es las dos terceras partes que la anterior vez que se puso en marcha. Si la cuarta vez que se puso en marcha tardó en dejar de funcionar 36 minutos.

(a) Calcule el tiempo que tardó en pararse la primera vez que se puso en marcha. (0,5 puntos)

(b) Estimamos que el tiempo que tardaremos en triturar todos los vehículos que tenemos es 6 horas. Con esta sola máquina defectuosa, demuestre matemáticamente que podremos hacer la tarea completa mediante operaciones matemáticas coherentes. (0,5 puntos)

(c) Estime el número mínimo de veces que habrá que encender la máquina para acometer la tarea completa en 6 horas. (0,75 puntos)

**(a) Calcule el tiempo que tardó en pararse la primera vez que se puso en marcha.**

$$a_4 = a_1 \cdot r^{4-1} \quad \Leftrightarrow \quad 36 = a_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{36}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = a_1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{36 \cdot 3^3}{2^3} = a_1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1 = 121{,}5 \; minutos$$

**(b) Estimamos que el tiempo que tardaremos en triturar todos los vehículos que tenemos es 6 horas. Con esta sola máquina defectuosa demuestre, mediante operaciones matemáticas coherentes, que podremos hacer la tarea completa.**

Al tratarse de una progresión geométrica de razón menor que 1, calculamos la suma de los infinitos términos,

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{121{,}5}{1-\frac{2}{3}} = \frac{121{,}5}{\frac{1}{3}} = 121{,}5 * 3 = 364{,}5 \; minutos = 6 \; horas \; 4 \min 30 \; seg$$

Por lo tanto, si podrá terminar la tarea.



**(c) Estime el mínimo número de veces que habrá que encender la máquina para acometer la tarea completa en 6 horas.**

Como

$$S_n = \frac{a_1 \cdot r^n - a_1}{r-1}$$

y $S_n = 360$ entonces,

$$360 = \frac{\frac{243}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{243}{2}}{\frac{2}{3} - 1} \quad \Leftrightarrow \quad 360 = \frac{\frac{243}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{243}{2}}{-\frac{1}{3}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -360 \cdot \frac{1}{3} = \frac{243}{2} \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{120}{\frac{243}{2}} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right) \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{240}{243} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{243} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{81} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Tomando logaritmos neperianos en ambos lados,

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{81}\right) = \ln\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{81}\right) = n \cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right) \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{\ln\left(\frac{1}{81}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 10{,}84$$

Por lo tanto, la undécima vez que la encienda, habrá terminado la tarea.