

**A. LÍMITES. INDETERMINACIÓN  $\infty/\infty$**

**9.1.** Calcula los siguientes límites resolviendo la indeterminación cuando se presente,

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 2x + 1}{1 - 5x^2 - 4x^3}$       b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x - 3}{x^2 - 9}$       c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 2x^3 + 2x + 1}{4x^3 - 2x^2 + x - 3}$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + x - 2}{8x^2 - 5x}$       e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3x - 1}$       f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{2x + 4}$

g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 4x^2 + 2}{1 - 6x^4 + 3x^2}$       h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x + 2}{2x^2 - 4x + 3}$       i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 6x^3}{2x^2 - 2 - 3x^3}$

**9.2.** Resuelve las siguientes indeterminaciones,

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 - 1} + x}$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1}}{x}$       c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{16x^2 + 3}}{\sqrt{9x^2 + 2} + \sqrt{4x^2 - 1}}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x} - 1}{\sqrt{x}}$       e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt[3]{8x^3 + x - 3}}$       f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 1}{x + \sqrt[4]{x}}$

g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{4x + \sqrt{x}}$       h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + \sqrt[4]{x^8}}$       i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x + 2}$

**B. LÍMITES. INDETERMINACIÓN 0/0**

**9.3.** Resuelve las siguientes indeterminaciones,

a)  $\lim_{x \rightarrow +2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$       b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$       c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x}{x^3 + 2x^2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +1} \frac{x - 1}{x^3 + x - 2}$       e)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x + 6}{x^4 - 10x^2 + 9}$       f)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 75}{x^2 - 10x + 25}$

g)  $\lim_{x \rightarrow +3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x - 18}$       h)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 7x}{x^2 - 49}$       i)  $\lim_{x \rightarrow +1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$

**9.4.** Resuelve las siguientes indeterminaciones,

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow +1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} + x}{2x} & c) \lim_{x \rightarrow +2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 - 3} - 1} \\ d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2 - x^2} - 1}{x + 1} & e) \lim_{x \rightarrow +9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} & f) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{4x} - x} \\ g) \lim_{x \rightarrow +2} \frac{\sqrt{x + 7} - 3}{\sqrt{2x} - 2} & h) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x - 3} - 1}{\sqrt{x} - 2} & i) \lim_{x \rightarrow +3} \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{\sqrt{x - 2} - 1} \end{array}$$

**C. LÍMITES. INDETERMINACIÓN  $\infty - \infty$**

**9.5.** Resuelve las siguientes indeterminaciones,

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 1} - x) & b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{4x^2 + 1}) \\ c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x}) & d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}) \\ e) \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^2 - \sqrt{16x^4 + x^2 - 1}) & f) \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - \sqrt{x - 2}) \\ g) \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{x^4 - 2x}) & h) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x + 3} - \sqrt{x - 1}) \end{array}$$

**D. LÍMITES. INDETERMINACIÓN  $1^\infty$**

**9.6.** Resuelve las siguientes indeterminaciones,

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{3x} & b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{3x} \\ c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-x^2}{x-x^2}\right)^{2x-1} & d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2+1}{2+3x^2}\right)^{1-x} \\ e) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2+x}{x}\right)^{\frac{2}{x}} & f) \lim_{x \rightarrow +3} \left(\frac{x^2-9}{6x-18}\right)^{\frac{x}{x-3}} \\ g) \lim_{x \rightarrow +1} \left(\frac{x-1}{2 \cdot \sqrt{x} - 2}\right)^{\frac{3x}{x^2-1}} & h) \lim_{x \rightarrow +2} \left(\frac{x^3-8}{3x^2-12}\right)^{\frac{x^2}{2-x}} \end{array}$$

**E. CÁLCULO DE ASÍNTOTAS EN FUNCIONES RACIONALES**

**9.11.** Calcula las asíntotas verticales de las siguientes funciones determinando las tendencias laterales de los mismos.

$$a) f(x) = \frac{x-1}{2x^2-6x} \quad b) g(x) = \frac{x^3}{1-2x} \quad c) h(x) = \frac{5x+1}{x^2+3x-4}$$

$$d) i(x) = \frac{2x}{x^2-16} \quad e) j(x) = \frac{x^2}{x^3-8} \quad f) k(x) = \frac{2x}{x^3-3x-2}$$

**9.12.** Calcula la asíntota horizontal de las siguientes funciones,

$$a) f(x) = \frac{4x^2+x-3}{2x^3-6x+1} \quad b) g(x) = \frac{2x-4}{6x-3} \quad c) h(x) = \frac{-6x^2-x+1}{3x^2+x+1}$$

$$d) i(x) = \frac{3x+1}{x^2-9} \quad e) j(x) = \frac{x^3-2x-3}{x^2+x-9} \quad f) k(x) = \frac{2x}{x^3-3x-2}$$

**9.13.** Calcula la asíntota oblicua de las siguientes funciones,

$$a) f(x) = \frac{4x^3}{2x^2-x-3} \quad b) g(x) = \frac{x^2-4}{x+3} \quad c) h(x) = \frac{6x^3-x+1}{x^2-2x}$$

$$d) i(x) = \frac{2x^2-4}{x-1} \quad e) j(x) = \frac{x^3-2x^2+x-3}{x+3} \quad f) k(x) = \frac{2x^3-4x^2}{x^2-x+1}$$

**9.14.** Calcula las asíntotas verticales, la horizontal y/u oblicua, cuando existan, de las siguientes funciones,

$$a) f(x) = \frac{x^2+3}{2x^2-x} \quad b) g(x) = \frac{2x}{x^2-9} \quad c) h(x) = \frac{3}{x+1}$$

$$d) i(x) = \frac{2x^2}{(x-1)^2} \quad e) j(x) = \frac{x^2-4}{2x^2-x-1} \quad f) k(x) = \frac{x^3}{x^2-2x+1}$$

$$g) l(x) = \frac{2x^2-x+1}{6x^2-4} \quad h) m(x) = \frac{x^2}{6x-3} \quad i) n(x) = \frac{x^2}{3x^2+6x}$$

**F. FUNCIONES A TROZOS**

**9.21.** Representa las siguientes funciones a trozos,

$$a) f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 2x & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

$$b) g(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

$$c) h(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x \leq -1 \\ x - x^2 + 1 & \text{si } -1 < x \end{cases}$$

$$d) i(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ -2x^2 + 3x - 1 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

En cada caso, ¿qué discontinuidades presentan y de qué tipo?

**9.22.** Representa las siguientes funciones a trozos,

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} + 5 & \text{si } x \neq 3 \\ -1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

$$b) g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \neq -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

$$c) h(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x \neq -1 \\ 3 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

$$d) i(x) = \begin{cases} 4x - 2x^2 & \text{si } x \neq -1 \\ 6 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

En cada caso, ¿qué discontinuidades presentan y de qué tipo?

**9.23.** Representa las siguientes funciones a trozos,

$$a) f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x < -2 \\ 3 & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ 1 - x^2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

$$b) g(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -2 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x^2 + 4x & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

$$c) h(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -3 \\ 8 - x^2 & \text{si } -3 < x < 2 \\ 2x - 5 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

$$d) i(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

En cada caso, ¿qué discontinuidades presentan y de qué tipo?

**9.24.** Escribe como funciones a trozos a las siguientes funciones en valor absoluto,

$$a) f(x) = |1 - 2x|$$

$$b) g(x) = |2x - 3|$$

$$c) g(x) = |x^2 - 4x + 3|$$

$$d) h(x) = |9 - x^2|$$

$$e) i(x) = |x^3 - 2x - 4|$$

$$f) j(x) = |x^3 - 1|$$

**9.25.** Representa las funciones del ejercicio anterior. ¿Son continuas? Razona tu respuesta.

**9.26.** Escribe como funciones a trozos a las siguientes funciones en valor absoluto,

$$a) f(x) = \frac{|x|}{x-1} \quad b) g(x) = \frac{|1-x|}{x} \quad c) g(x) = 3x^2 - 2 \cdot |x| + 1$$

$$d) h(x) = \frac{|x-x^2|}{x+2} \quad e) i(x) = \frac{|x-3|}{2 \cdot |x| + 1} \quad f) j(x) = \frac{|x^2-1|}{|x+2|}$$

En cada caso, ¿qué discontinuidades presentan y de qué tipo?

### G. CONTINUIDAD DE FUNCIONES MEDIANTE LÍMITES

**9.31.** Estudia la continuidad de las siguientes funciones, clasificando los valores donde exista discontinuidad,

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ 2x & \text{si } 2 \leq x \end{cases} \quad b) g(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

$$c) h(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x}{x^3-x} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{x+1} & \text{si } 0 = x \end{cases} \quad d) i(x) = \begin{cases} 1+2x & \text{si } x = -1 \\ \frac{x^2-1}{x+1} & \text{si } -1 \neq x \end{cases}$$

**9.32.** Estudia la continuidad de las siguientes funciones, en los valores clasificando los valores donde exista discontinuidad,

$$a) f(x) = \begin{cases} x^{1/(x-1)} & \text{si } x < 1 \\ ex & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \quad b) g(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x < 2 \\ \frac{x^3-8}{x^2-4} & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

$$c) h(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2-9} & \text{si } x \leq 3 \\ \left(\frac{x-2}{x^2-8}\right)^{2/(x-3)} & \text{si } 3 < x \end{cases} \quad d) i(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+x} & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

**9.33.** Calcula el valor de  $a$  para que las siguientes funciones sean continuas,

$$a) f(x) = \begin{cases} ax + 2 & \text{si } x \leq 3 \\ 1 - 4x & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

$$b) g(x) = \begin{cases} 2 + ax - x^2 & \text{si } x < -2 \\ 3a - x & \text{si } -2 \leq x \end{cases}$$

$$c) h(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \leq 4 \\ ax + 1 & \text{si } 4 < x \end{cases}$$

$$d) i(x) = \begin{cases} ax^2 + 2 & \text{si } x < 0 \\ 2x - a & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

**9.34.** Calcula el valor de  $a$  y  $b$  para que las siguientes funciones sean continuas,

$$a) f(x) = \begin{cases} 3x^2 + a & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ 2 + bx & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

$$b) g(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{si } x \leq -3 \\ 1 - 2x & \text{si } -3 < x \leq 1 \\ 2x - bx^2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

$$c) h(x) = \begin{cases} a - x & \text{si } x \leq 0 \\ 2a & \text{si } 0 < x < 2 \\ bx + 1 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

$$d) i(x) = \begin{cases} -ax^2 + b & \text{si } x < -2 \\ bx - 3 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 3x - 1 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

LA WEB DEL

PROFE DE MATES