1 º BACH. – MATEMÁTICAS I

VECTORES. ECUACIONES DE LA RECTA. PROBLEMAS DE INCIDENCIA. POSICIONES RELATIVAS. PROBLEMAS MÉTRICOS

UNIDAD 7

A. MÓDULO DE UN VECTOR. EQUIPOLENCIA DE VECTORES. COORDENADAS DE UN VECTOR.

7.1. Representa los siguientes vectores y calcula su módulo.

a) $\overrightarrow{AB}$ con A(1, 3) y B(– 2, 5)
b) $\overrightarrow{CD}$ con C(– 2, 5) y D(3, – 2)
c) $\overrightarrow{EF}$ con E(0, – 2) y F(– 2 , – 2)
d) $\overrightarrow{GH}$ con G(4, – 3) y H(– 5, 0)

7.2. Dados los puntos A(1, 3) , B(2, 7) , C(4, 9) y D(5, 13),

a) Determina cuáles de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}$ son equipolentes.
b) Calcula el módulo de los vectores diagonales.
c) 64. Dados los puntos A(1, 3) , B(2, 7) , C(4, 9) y D(5, 13),

7.3. Dados los puntos A(2, -4) , B(-3, 4) , C(1, 5) y D(2, 6). Escribe las coordenadas de los vectores,

$$\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}\ ,\overrightarrow{AD}\ ,\ \overrightarrow{BA}\ ,\ \overrightarrow{BC}\ ,\ \overrightarrow{BD},\ \overrightarrow{CA},\ \ \overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{CD},\ \ \overrightarrow{DA},\ \ \overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{DC}$$

respecto de la base canónica $\vec{\imath} = (1{,}0)$, $\vec{\jmath} = (0{,}1)$

7.4. Dados los puntos A(0, 0), B(1, 1) y C(0, 2), halla las coordenadas de un punto D para que los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ sean equivalentes, y también para que sean paralelos.

7.5. Dados los triángulos siguientes, determina si son equiláteros, isósceles o escalenos,

a) ABC con vértices A(– 3, 5), B(0, – 1) y C(3, 5).
b) ABC con vértices E(– 1, – 4), F(1, 0) y G(2, 3).
c) ABC con vértices A(4, -6), B(-2, 2) y C(-4, 0).

7.6. Dados los puntos A(−2, 0), B(0, 0) y C(3, −2), representa y calcula las coordenadas y el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AC}$.

7.7. Dados los puntos A(3, −5) y B(– 2, 1), C(7, 0) y D(2, – 6), demuestra cuáles de los siguientes vectores son equipolentes calculando sus coordenadas libres.

$$\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{BA}\ ,\overrightarrow{CD}\ ,\ \overrightarrow{DC}\ ,\overrightarrow{AC}\ ,\ \overrightarrow{CA}\ \overrightarrow{BD}\ ,\ \overrightarrow{DB}$$

7.8. Muestra mediante vectores cuáles de los siguientes cuadriláteros ABCD forman un paralelogramo

a) A(2, −5) y B(– 3, 2), C(1, 6) y D(8, – 1),
b) A(2, 4) y B(– 2, – 2), C(– 3, 3) y D(4, – 3)
c) A(3, −1) y B(– 3, – 2), C(2, 3) y D(– 4, 2)

7.9. Dadas las coordenadas de los siguientes vectores libres, calcula su módulo y el ángulo que forman con el semieje positivo OX.

$$a)\ \vec{u} = (2,3) \quad b)\ \vec{v} = (4,-2) \quad c)\ \vec{w} = (-6,-8) \quad d)\ \vec{z} = (-5,4)$$

$$e)\ \vec{a} = (5,5) \quad f)\ \vec{b} = (-12,-9) \quad g)\ \vec{c} = (4,0) \quad h)\ \vec{d} = (2,3)$$

7.10. Dado el módulo y argumento respecto del semieje positivo OX, calcula las coordenadas de los vectores.

$$a)\ |\vec{u}| = 4, \quad \theta = 60° \quad b)\ |\vec{v}| = 6, \quad \theta = \frac{4\pi}{3} \quad c)\ |\vec{w}| = 3, \quad \theta = -10°$$

$$d)\ |\vec{a}| = 2, \quad \theta = -\frac{\pi}{6} \quad e)\ |\vec{b}| = \sqrt{3}, \quad \theta = -120° \quad f)\ |\vec{c}| = \sqrt{2}, \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

7.11. Dadas las coordenadas de los siguientes vectores libres, calcula su módulo y el ángulo que forman con el semieje positivo OX.

$$a)\ \vec{u} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} \quad b)\ \vec{v} = -6\vec{\imath} + 8\vec{\jmath} \quad c)\ \vec{w} = 4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} \quad d)\ \vec{z} = 5\vec{\imath}$$

$$e)\ \vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} \quad f)\ \vec{b} = -3\vec{\jmath} \quad g)\ \vec{c} = -3\vec{\imath} - 8\vec{\jmath} \quad h)\ \vec{d} = -4\vec{\imath} + \vec{\jmath}$$

B. OPERACIONES CON VECTORES

7.21. Sabiendo que A(3, −4) y B(5, 2), calcula $k \cdot \overrightarrow{AB}$.

a) k =3 b) k = −2 c) k =5 d) k = 1/2

7.22. Las coordenadas de los puntos A, B, C y D son A(0, 0) , B (−1, 3) , C(−2, −2) y D(1 −3) calcula el resultado de estas operaciones.

a) $\overrightarrow{AB} + 3 \cdot \overrightarrow{CD}$ c) $5 \cdot \overrightarrow{CD} - 2 \cdot \overrightarrow{AB}$ e) $4 \cdot \overrightarrow{CD} - 3 \cdot \overrightarrow{CD}$

b) $\overrightarrow{AB} - 4 \cdot \overrightarrow{CD}$ d) $2 \cdot \overrightarrow{AB} - 3 \cdot \overrightarrow{AB}$ f) $-\overrightarrow{AB} + 2 \cdot \overrightarrow{CD}$

7.23. Los puntos A(−1, 1), B(0, 2) y C(2, 0) son los vértices de un triángulo. Halla las coordenadas de los vectores que forman sus lados.

7.24. Si $\vec{u} = (-3, 2)$ y $\vec{w} = (4, -1)$, determina el vector $\vec{v}$ tal que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$

7.25. Efectúa las siguientes operaciones analíticamente si $\vec{u} = (6, 2)$ y $\vec{v} = (-2, 1)$.

a) $2\vec{u} + 3\vec{v}$ b) $(-1) \cdot \vec{v} - \vec{u}$ c) $-3\vec{v} + 4\vec{u}$

C. PUNTO MEDIO Y VECTOR UNITARIO. ÁREAS DE TRIÁNGULOS. BARICENTRO.

7.31. Calcula el punto medio de los segmentos de extremos,

a) A(3, −2) y B(– 2, 1)
b) C(2, 4) y D(– 6, – 5)
c) E(1, – 4) y F(– 3, 4)
d) G(– 3, 0) y H(3, – 2)
e) I(0, −1) y J(– 2, – 3)
f) K(2, 0) y L(– 4, – 1)

7.32. Halla las coordenadas de los puntos medios del triángulo de vértices A (0,0), B (3,1) y C (1,5)

7.33. Calcula las coordenadas del baricentro del triángulo anterior.

7.34. Calcula el área de los siguientes triángulos ABC de coordenadas:

a) A(1, 4), B(– 2, 2) y C(3, 1)
b) A(–2, 3), B(3, –4) y C(2, 2)
c) A(–1, 5), B(– 2, 1) y C(2, 4)
d) A(–3, –1), B(2, –1) y C(5, 3)

7.35. Para cada uno de los triángulos del ejercicio anterior, calcule los puntos medios de sus lados y el baricentro de cada uno de ellos.

7.36. Para cada uno de los siguientes vectores, calcula un vector unitario en la misma dirección y sentido que su correspondiente.

a) $\vec{u}$ (– 3, 5)
b) $\vec{v}$ (– 8, 13)
c) $\vec{w}$ (2, – 4)
d) $\vec{r}$ $(-3, -4)$

7.37. Calcula x para que el vector $\vec{u}$= (1/2, x) sea unitario.

D. PRODUCTO ESCALAR

7.41. Calcula el producto escalar de los siguientes vectores:

a) $\vec{u}\,(3, -5)$ y $\vec{v}\,(-2, 1)$
b) $\vec{u}\,(2, 0)$ y $\vec{v}\,(-6, -5)$
c) $\vec{u}\,(1, -4)$ y $\vec{v}(-2, 6)$
d) $\vec{u}\,(-3, -3)$ y $\vec{v}(2, -2)$
e) $\vec{u}\,(6, -2)$ y $\vec{v}(-3, -9)$
f) $\vec{u}(2, 0)$ y $\vec{v}\,(0, -3)$
g) $\vec{u}(3, 0, 1)$ y $\vec{v}\,(2, 1, -2)$
h) $\vec{u}(3, 2, -1)$ y $\vec{v}\,(1, 0, -2)$
i) $\vec{u}(1, 0, 1)$ y $\vec{v}\,(0, 1, -1)$
j) $\vec{u}(-2, 1, 0)$ y $\vec{v}\,(1, 2, -3)$

7.42. Determina en los anteriores casos, qué vectores son ortogonales.

7.43. Dados los puntos de coordenadas A(−1, 7) y B(0, 1):

a) Calcula el vector director de la recta *r* que pasa por A y B.
b) Halla la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de dicha recta.

7.44 ¿Qué ángulo forman los vectores $\vec{u}$ = (-3,1) y $\vec{v}$= (4,-3)? ¿y los vectores $\vec{w}$ = (4, -5) y $\vec{s}$ = (5,4)?

7.45. Calcula el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabiendo que $\vec{u}$ = (3, 4) y $|\vec{v}|$ = 4 y el ángulo que forman es de 30^0

7.46. Dados los puntos A (2,1), B (6,3), C (7,1) y D (3,-1). Demuestra que el polígono ABCD es un rectángulo y calcula su perímetro y su área.

7.47. Calcula un vector ortogonal al vector **u** =(6, 8) que sea unitario.

7.48. Calcula x para que los vectores $\vec{u}$ = (3, 4) y $\vec{v}$ =(1, x) sean:

a) Ortogonales b) Paralelos c) Formen un ángulo de 60^0

7.49. Calcula la proyección escalar del vector (3, 2) sobre el vector (5, -1)

7.50. Los puntos A (-1,-2), B (1,1), C (4,0) son tres coordenadas de un paralelogramo, calcula las coordenadas del cuarto vértice.

E. ECUACIONES DE LA RECTA EN EL PLANO

7.51. Calcula la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de la recta *s* que,

a) pasa por el punto A(0, −4) y tiene como vector director $\vec{v}$ = (−1, 7).
b) pasa por el punto medio del segmento AB formado por A(– 1, 4) y B(1, 2) y tiene como vector director $\vec{u}$ = (−2, 3).
c) pasa por el origen de coordenadas y tiene como vector director $\vec{w}$ = (1, −2).
d) Corta al eje OX en x = 2 y tiene como vector director $\vec{w}$ = (0, 5).

7.52. Determina un punto y un vector director de las siguientes rectas en forma paramétrica,

$$a)\ r \equiv \left.\begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = 2 + 4t \end{array}\right\} \ t \in \mathbb{R} \qquad b) s \equiv\ (x, y) = (1,2) + t \cdot (1, -1)\ \ t \in \mathbb{R}$$

$$c)\ m \equiv \left.\begin{array}{l} x = 4 + t \\ y = \quad -t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R} \qquad d)\ o \equiv \left.\begin{array}{l} x = \quad 2t \\ y = 1 - 3t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

$$e)\ p \equiv\ (x, y) = +t \cdot (3,5)\ \ t \in \mathbb{R} \qquad e) q \equiv \left.\begin{array}{l} x = -4 - 2t \\ y = -3 - 4t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

7.53.. Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta *r* que pasa por el punto A(1, 3) y es paralela a la recta *s* que tiene por ecuaciones paramétricas,

$$s \equiv \left.\begin{array}{l} x = -3 - 2t \\ y = 5 - t \end{array}\right\} \ t \in \mathbb{R}$$

7.54. Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta *r* que pasa por el punto B(2, – 5) y es paralela a la recta *s* que tiene por ecuaciones paramétricas,

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 + 3t \end{array}\right\} \ t \in \mathbb{R}$$

7.55. Determina un punto y un vector director de las siguientes rectas,

$$a)\ \ r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} \qquad b)\ \ s \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-3}{3} \qquad c)\ \ t \equiv x + 2 = \frac{y}{4}$$

$$d)\ \ p \equiv \frac{x+1}{5} = \frac{y+3}{-3} \qquad e)\ q \equiv \frac{x}{4} = \frac{y}{-5} \qquad f)\ r \equiv \frac{x+3}{3} = y$$

7.56. Escribe las rectas del apartado anterior en forma implícita y paeamétrica.

7.57. Determina un punto y un vector director de las siguientes rectas dadas en forma implícita,

$$a)\ r \equiv 2x - y = 1 \qquad b)\ s \equiv -4x + 3y = 7 \qquad c)\ t \equiv x + 2y = 5$$

$$d)\ p \equiv 5x + y = 4 \qquad e)\ q \equiv -x + 3y = 8 \qquad f)\ r \equiv 3x - y = 8$$

7.58. Determina un vector normal de las rectas del ejercicio anterior.

7.59. Calcula la ecuación continua y implícita de la recta *r* que,

a) pasa por el punto A(−3, 2) y tiene como vector director $\vec{v}$ = (1, −2).
b) pasa por el punto medio del segmento AB formado por A(3, – 1) y B(2, 4) y tiene como vector director $\vec{u}$ = (−3,– 5).
c) pasa por el origen de coordenadas y tiene como vector director $\vec{w}$ = (0, −2).
d) Corta al eje OY en x = 1 y tiene como vector director $\vec{w}$ = (– 2, 5).

7.60. Calcula la ecuación continua e implícita de las rectas siguientes

$$a)\ r \equiv \left.\begin{matrix} x = 2 + 3t \\ y = 3 - 2t \end{matrix}\right\} t \in \mathbb{R} \qquad b)\ s \equiv (x, y) = (1,2) + t \cdot (0, -1) \quad t \in \mathbb{R}$$

$$c)\ m \equiv \left.\begin{matrix} x = 4 \\ y = 2t \end{matrix}\right\} t \in \mathbb{R} \qquad d)\ o \equiv \left.\begin{matrix} x = 5 + 2t \\ y = 2 - 4t \end{matrix}\right\} t \in \mathbb{R}$$

$$e)\ p \equiv (x, y) = (-1,5) + t \cdot (1,2) \quad t \in \mathbb{R} \qquad F)\ q \equiv \left.\begin{matrix} x = 2 - 2t \\ y = 1 - t \end{matrix}\right\} t \in \mathbb{R}$$

7.61. Determina un punto y un vector director de las siguientes rectas dadas en forma explícita,

$$a)\ r \equiv y = 3x - 1 \qquad b)\ s \equiv y = \frac{2x}{5} - 1 \qquad c)\ t \equiv y = \frac{1}{2} - 2x$$

$$d)\ p \equiv \ y = \frac{1 - x}{4} \qquad e)\ q \equiv y = 1 - \frac{4x}{3} \qquad f)\ r \equiv y = \frac{9x - 1}{2}$$

7.62. Determina la pendiente y la ordenada en el origen de las rectas del ejercicio anterior.

7.63. Calcula la ecuación explícita de las rectas siguientes

$$a)\ r \equiv \ 2x - 3y = 4 \qquad b)\ s \equiv (x, y) = (2, -4) + t \cdot (1,2) \quad t \in \mathbb{R}$$

$$c)\ m \equiv \left.\begin{matrix} x = 2 + t \\ y = 1 + t \end{matrix}\right\} t \in \mathbb{R} \qquad d)\ o \equiv \left.\begin{matrix} x = 3 - 2t \\ y = 1 - 3t \end{matrix}\right\} t \in \mathbb{R}$$

$$e)\ \ p \equiv \frac{1 - x}{3} = \frac{y + 1}{2} \qquad e)\ q \equiv \left.\begin{matrix} x = 3 + t \\ y = \ 2t \end{matrix}\right\} t \in \mathbb{R}$$

7.64. Determina la pendiente y la ordenada en el origen de las rectas anteriores.

7.65. Determina la ecuación de la recta paralela a $r \equiv 2x - y = 1$ y que pasa por el punto $A(1, 3)$.

7.66. Determina la ecuación de la recta paralela a $r \equiv 3x + 2y = 5$ y que pasa por el punto $B(2, -1)$.

7.67. Calcula el punto de corte de las rectas,

$a)\ r \equiv \left.\begin{array}{l} x = 2 + 3t \\ y = 3 - 2t \end{array}\right\} \ t \in \mathbb{R} \ \ y\, s \equiv \ 2x - y = 1$ $\qquad b)\ r \equiv 3x + 2y = 1 \ \ y \ \ s \equiv 2x - y = 3$

$c)\ r \equiv \left.\begin{array}{l} x = 2 + 3t \\ y = 3 - 2t \end{array}\right\} \ t \in \mathbb{R} \ \ y\, s \equiv \left.\begin{array}{l} x = 2t \\ y = 1 - t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$ $\qquad d)\ r \equiv x + 2y = 1 \ \ y \ \ s \equiv x + y = -2$

768. Determina la ecuación de la recta perpendicular a $r \equiv 2x - y = 1$ y que pasa por el punto $A(2, 0)$.

7.69. Determina la ecuación de la recta perpendicular a x +3y = 1 y que pasa por el punto $B(1, -1)$.

7.70. De la recta r se sabe que pasa por el punto A (2,1) y un vector director es $\vec{u} = (-2, 4)$. Determina su ecuación en todas las formas que conozcas.

7.71. Escribe la ecuación vectorial, paramétrica y continua de la recta que pasa por los puntos A $(3,2)\ y\ B\ (1, -2)$

7.72. Calcula la ecuación implícita de la recta que corta a los ejes de coordenadas en los puntos $(6,0)\ y\ (0, -4)$

7.73.¿Pertenece el punto $(0,5)$ a la recta determinada por el vector $\boldsymbol{u} = (1, 3)$ y el punto $A\ (2,3)$?

7.74. La ecuación en forma implícita de una recta es $2x - 3y + 1 = 0$. Escribe la ecuación de esta recta en forma vectorial, paramétrica, continua, punto-pendiente razonando la respuesta.

F. PROBLEMAS DE DISTANCIAS Y ÁNGULOS.

7.81. Dado el punto $P(2,1)$ y la recta $r \equiv x + y = 5$, calcula la distancia entre la recta y el punto.

7.82. Dado el punto $Q(-2,3)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 3t \end{cases} \ \forall t \in \mathbb{R}$, calcula la distancia entre la recta y el punto.

7.83. Dada la recta r que pasa por los puntos $P(1,-1)$ y $Q(-3,2)$ calcula la distancia entre y la recta r y el punto $R(3,-2)$.

7.86. Dadas las rectas $r \equiv x+2y=3$ y la recta $r \equiv -2x-4y=5$, demuestra que son paralelas y calcula la distancia mínima entre ellas.

7.87. Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{6}$ y la recta $s \equiv 2x-y=-3$, demuestra que son paralelas y calcula la distancia mínima entre ellas.

7.88. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x=3+2t \\ y=2-\ \ t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ la recta $s \equiv x+y=-3$, demuestra que son paralelas y calcula la distancia mínima entre ellas.

7.91. Dadas las rectas $r \equiv x+3y=3$ y la recta $r \equiv x-4y=2$, demuestra que son secantes, calcula su punto de corte y calcula el ángulo agudo que forman.

7.92. Dadas las rectas $r \equiv \frac{4x-1}{2}=\frac{2-y}{3}$ y la recta $s \equiv 5x+4y=2$, demuestra que son secantes, calcula su punto de corte y calcula el ángulo agudo que forman.

7.93. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x=3+2t \\ y=2-\ \ t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ la recta $s \equiv x+5y=2$, demuestra que son paralelas y calcula la distancia mínima entre ellas.

7.94. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x=\ \ \ \ \ \ t \\ y=1+t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ la recta $s \equiv x+2y=1$, demuestra que son secantes, calcula su punto de corte y calcula el ángulo agudo que forman.

G. PROBLEMAS CON PARÁMETROS. POSICIONES RELATIVAS

7.101. Determinar el valor de a para que las rectas $ax+(a-1)y=2(a+2)$ sean:

- Paralelas
- Perpendiculares

7.102. Determinar el valor de m para que las rectas $mx+y=12$ y $4x-3y=m+1$ sean paralelas. Después halla su distancia

7.103. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos $A\ (1,-2)$ y $B\ (3,0)$. Hallar, también, el ángulo que forma esta mediatriz con el eje de abscisas.

7.104. Hallar el área del paralelogramo $ABCD$, sabiendo que la ecuación del lado AB es $x-2y=0$, la ecuación del lado AD es $3x+y=0$ y las coordenadas del punto $C\ (3,5)$. Razona la respuesta.

7.105. Calcula las ecuaciones de todas las rectas que pasan por el punto $P(2,-3)$ y forman un ángulo de $45°$ con la recta $3x-4y+7=0$.

7.106. Dados los puntos $A\ (4,-2)\ y\ B\ (10,0)$, hallar el punto de la bisectriz del $2º\ y\ 4º$ cuadrante que equidista de ambos puntos.

7.107. Dados los puntos $A\ (2,1), B\ (-3,5)\ y\ C\ (4,m)$, calcular el valor de m para que el triángulo ABC tenga de área $6\ unidades\ cuadradas$.

7.108. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasando por el punto $A(1,-2)$ distan $2\ unidades$ del punto $B(3,1)$.

7.109. Un rayo de luz r pasa por el punto $P\ (1,2)$ e incide sobre el eje de abscisas formando con éste un ángulo de $135°$. Suponiendo que sobre el eje de abscisas se encuentra un espejo, hallar la ecuación del rayo r y del rayo reflejado por el espejo.

7.110. Hallar los puntos de la recta $7x-y-28=0$ que distan 5 unidades de la recta $3x-4y-12=0$.

7.111. Calcular las coordenadas de un punto P situado sobre la recta $x+y-15=0$ que equidiste de las rectas $y-2=0\ \ y\ \ 3y=4x-6$.

7.112 Las rectas $r:\ 3x+4y-5=0\ y\ s:\ ax+7y+2=0$ forman un ángulo cuyo seno vale $3/5$. Calcula el valor de a.