

A. VALORES Y OPERACIONES CON POLINOMIOS

4.1. Dado el polinomio $P(x) = x^3 - 2x + 2x^2 - 3$, calcula,

a) $P(3)$ b) $P(0)$ c) $P(-2)$

4.2. Dado los polinomios $P(x) = 2x^2 - 3x + 5$ $Q(x) = 3 - 2x^2 + 4x$ y calcula,

a) $P(x) + Q(x)$ b) $3P(x) - 2 \cdot Q(x)$ c) $Q(x) - P(x)$

4.3. Dado los polinomios $P(x) = 3x^4 - 3x^2 + 2 - 2x^3$, $Q(x) = 2x - 4x^2 + x$ y $R(x) = 4x^2 - 3 + 2x$ calcula,

a) $P(x) \cdot Q(x)$ b) $P(x) \cdot R(x)$ c) $Q(x) \cdot R(x)$

4.4. Calcula:

a) $(x^2 - 3) \cdot (5 + 2x)$ b) $(1 - 3x) \cdot \left(2x + \frac{2}{3}\right)$ c) $\left(\frac{3x}{5} - 2\right) \cdot \left(\frac{5x^2}{3} + \frac{1}{4}\right)$

4.5. Calcula,

a) $(x^2 - 3 + 2x) \cdot (4 + 2x - 3x^3)$ b) $\left(\frac{3x^2}{2} - x + \frac{3}{4}\right) \cdot \left(4 + \frac{2x}{3}\right)$
c) $\left(\frac{x}{5} - 2x\right) \cdot \left(\frac{5x^2}{2} + 1 - \frac{10x}{4}\right)$ d) $\left(\frac{1}{2} - \frac{5x}{4}\right) \cdot \left(4x - \frac{2x}{5}\right)$

4.6. Saca factor común al máximo en los siguientes polinomios,

a) $5x^4 + 15x^2 - 10x^3$ b) $12x^3y^6 - 16x^5y^2 - 20x^3y^3$ c) $4t^2 - 8t$
d) $9z^6 + 12z^3 - 15$ e) $x^2t - 6x^3t^4 - 9x^3t^2$ f) $x - x^2$

PRODUCTOS NOTABLES

4.8. Calcula mediante las fórmulas de los productos notables,

a) $\left(\frac{5x^2}{3} + 3\right)^2$ b) $\left(2y^3 - \frac{1}{4}\right)^2$ c) $(3z^4 - 2) \cdot (3z^4 + 2)$
d) $\left(\frac{t^3}{4} - \frac{1}{t}\right)^2$ e) $\left(\frac{z^4}{3} + 4\right) \cdot \left(\frac{z^4}{3} + 4\right)$ f) $\left(\frac{y^2}{x} + x\right)^2$

4.9. Escribe el producto notable del que proceden cada uno de los siguientes polinomios:

a) $9x^2 + 12x + 4$ b) $16 - y^2$ c) $\frac{4z^4}{25} - \frac{16}{5} \cdot z^2 + 16$
 d) $\frac{t^2}{4} - \frac{1}{9}$ e) $4x + x^2 + 4$ f) $36z + 36z^4 + 9$

B. BINOMIO DE NEWTON

4.11. Calcula los siguientes binomios de Newton.

a) $\left(\frac{x^3}{2} + 4\right)^3$ b) $(1 - 3t^2)^4$ c) $\left(\frac{1}{3} + 6y\right)^5$
 d) $\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)^6$ e) $\left(2 + \frac{1}{t^2}\right)^3$ f) $\left(y^2 - \frac{1}{2}\right)^4$
 g) $\left(x + \frac{3}{x^2}\right)^5$ h) $\left(t^3 - \frac{1}{t}\right)^6$ i) $\left(\frac{1}{y^2} + 1\right)^7$

4.12. Calcula el término independiente, si es que lo tienen, en las siguientes expresiones al desarrollarlas,

a) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^4$ b) $(1 - t^3)^5$ c) $\left(\frac{2}{y^2} + y\right)^6$

4.13. Calcula el coeficiente de grado que se indica en cada una de las siguientes expresiones al desarrollarlas,

a) $\left(\frac{1}{2x^2} - 4x\right)^5$ (grado -1) b) $\left(\frac{2}{t} + t^3\right)^4$ (grado 8) c) $\left(\frac{y^2}{3} - \frac{3}{y^2}\right)^3$ (grado 2)

4.14. Calcula el coeficiente de grado 4 del binomio de Newton $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^5$

4.15. Calcula el coeficiente de grado 3 del binomio de Newton $\left(\frac{1}{t^2} - 3t\right)^6$

4.16. En el desarrollo de $(x + k)^7$ donde $k \in \mathbb{R}$, el coeficiente del término x^5 es 63. Halle los posibles valores de k .

4.17. Halle el valor del término constante del desarrollo de $x^4 \left(x + \frac{3}{x^2}\right)^5$.

4.18. Se considera el desarrollo de $\left(2x + \frac{k}{x}\right)^9$ donde $k > 0$. El coeficiente del término x^3 es igual al coeficiente en x^5 . Halle k .

4.19. El tercer término del desarrollo de $(x + k)^8$ es $63x^6$. Halle los posibles valores de k .

4.20. Considere el desarrollo de $x^2 \left(3x^2 + \frac{k}{x}\right)^8$. El término constante es 16 128. Halle k .

C. DIVISIONES DE POLINOMIOS

4.31. Divida determinando el cociente y el resto,

a) $(4x^4 + 2x - 10x^3 - 1) : (x^2 + 2x - 1)$

b) $(3 + 2x - 4x^3) : (x - x^2 - 2)$

c) $(3x^2 - 5x - 2x^4 + 2) : (x + 4)$

d) $(2 - 2x^2 - 4x^4) : (2x - x^2)$

e) $(3x^4 + 2x + 4 - 10x^2 + x^3) : (x - 1)$

f) $(2 - 5x - 3x^2) : (x^2 + 2)$

g) $(x^5 - 32) : (x - 2)$

h) $(4x^2 + 2x - 8) : (2x^2 + x - 1)$

4.32. Divida por el método de Ruffini, determinando el cociente y el resto,

a) $(4x^4 + 2x - 10x^3 - 1) : (x - 1)$

b) $(3 + 2x - 4x^3) : (x - 2)$

c) $(3x^2 - 5x + 2x^4 - 2) : (x - 3)$

d) $(2 - 2x^2 - 4x^4) : (x + 1)$

e) $(x^4 - 5x + 3 - 4x^2 - 2x^3) : (x + 2)$

f) $(2 - 5x - 3x^2) : (x + 4)$

g) $(x^4 - 13x^2 + 36) : (x + 3)$

D. TEOREMA DEL RESTO

4.33. Calcula el resto de dividir los siguientes polinomios sin realizar división alguna o aplicar el método de Ruffini,

a) $P(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$ entre $(x - 2)$

b) $Q(x) = x^4 - x^2 + 2x - 3$ entre $(x + 1)$

c) $R(x) = x^3 - 9x$ entre $(x + 3)$

d) $S(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ entre $(x - 1)$

4.34. Comprueba si el polinomio $(x + 2)$ es divisor de $Q(x) = x^4 + 2x^3 + 3x - 5$ sin dividir.

4.35. ¿Es el polinomio $R(X) = x^{71} - 1$ divisible entre $(x + 1)$? Razona tu respuesta.

4.36. Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios mediante el método de Ruffini,

a) $P(x) = x^3 - 2x - x^2 - 3$ en $x = -1$

b) $Q(x) = x^2 - 5x - 6$ en $x = +2$

c) $R(x) = 2x^3 - x + 1$ en $x = +\frac{1}{2}$

d) $S(x) = x^3 - 5x - 2$ en $x = -3$

4.37. Calcula el valor de "k" para que ...

a) $P(x) = x^2 + kx + 4$ sea divisible entre $(x - 2)$

b) $Q(x) = x^3 - (k + 1)x^2 + 3kx + 1$ sea divisible entre $(x + 1)$

c) $R(x) = x^3 - k^2$ sea divisible entre $(x - 4)$

d) $S(x) = x^3 - kx^2 + (k - 1)x - 2$ sea divisible entre $(x - 1)$

4.38. Calcula el valor de "k" para que ...

a) $P(x) = x^3 + kx + 3$ de resto 2 al dividirlo entre $(x - 2)$

b) $Q(x) = (k - 2)x^2 + kx + 1$ de resto - 3 al dividirlo entre $(x + 1)$

c) $R(x) = x^4 - k^2x - k$ de resto 1 al dividirlo entre $(x - 5)$

d) $S(x) = k^2 + (k + 1)x - x^2$ de resto - 23 al dividirlo entre $(x + 4)$

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

4.41. Factoriza los siguientes polinomios mediante la extracción de factores y/o mediante productos notables.

a) $P(x) = x^3 + 3x$

b) $Q(x) = x^3 + 2x^2 + x$

c) $R(x) = x^4 - 16$

d) $S(x) = x^4 - 9x^2$

e) $T(x) = x^5 - 4x^4 + 4x^3$

e) $U(x) = x^6 - 4x^4$

f) $V(x) = x^4 + 9x^2 + 6x^3$

g) $Y(x) = x^3 - 64x$

h) $Z(x) = x^3 - x$

4.42. Calcula todas las raíces de los siguientes polinomios,

a) $A(x) = x^2 - 6 - x$

b) $B(x) = x^3 - 5x - 6 + 2x^2$

c) $C(x) = x^3 - x + 2 - 2x^2$

d) $D(x) = x^3 - 3 - x^2 - 5x$

e) $E(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$

f) $F(x) = x^4 + 12 - 7x^2 + 2x^3 - 8x$

4.43. Factoriza los siguientes polinomios mediante producto de factores irreducibles,

a) $A(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $B(x) = x^3 - x - 2x^2 + 2$

c) $C(x) = x^3 - 7x + 6$

d) $D(x) = x^3 - 4 - 5x^2 + 8x$

e) $E(x) = 6x^2 + x^3 + 12x + 8$

f) $F(x) = x^4 - 6 - 3x^2 - 3x^3 + 11x$

g) $C(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

h) $F(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$

4.44. Determina todas las raíces de los siguientes polinomios factorizados y su multiplicidad,

a) $A(x) = (x - 1) \cdot (x + 2)$

b) $B(x) = x \cdot (x + 3) \cdot (x + 1)$

c) $C(x) = 3x^2 \cdot (x + 1)^3 \cdot (x - 4)$

d) $D(x) = 2 \cdot (x - 1)^4$

e) $E(x) = x^3 \cdot (x + 1)$

f) $F(x) = 4 \cdot (x - 5) \cdot (x + 5) \cdot (x - 4)$

4.45. Escribe un polinomio que cumpla las siguientes características,

a) Su grado es tres y tiene por raíces $x = 1$, $x = -2$ y $x = -1$

b) Su grado es tres y tiene una única raíz $x = 2$ de multiplicidad 3.

c) Su grado es cuatro y tiene por raíces $x = 0$, $x = 1$ de multiplicidad 2 y $x = -1$

d) Su grado es cinco y tiene por raíces $x = 0$ de multiplicidad 2, $x = -3$ de multiplicidad 2 y $x = 3$.

4.46. Factoriza los siguientes polinomios mediante producto de factores irreducibles,

a) $A(x) = 3x^3 - 3x^2 - 18x$

b) $B(x) = 2x^4 - 10x^3$

c) $C(x) = 3x^5 - 9x^4 + 6x^3$

d) $D(x) = 18x - 12x^2 + 2x^3$

e) $E(x) = 2x^5 - 18x^3$

f) $F(x) = 3x^5 + 9x^4 + 9x^3 + 3x^2$

4.47. Calcula el M.c.d. y el m.c.m. factorizado de los siguientes polinomios cuya descomposición en factores irreducibles es la que sigue,

a) $A(x) = (x - 3) \cdot (x + 2)$ y $B(x) = x \cdot (x - 3)$

b) $C(x) = x \cdot (x - 2)^3$ y $D(x) = 4x^2 \cdot (x - 2)^2$

c) $E(x) = (x - 1) \cdot (x + 2)^2$ y $F(x) = (x + 2) \cdot (x - 1)^2$

4.48. Calcula el M.c.d. y el m.c.m. de los siguientes polinomios,

a) $A(x) = x^4 - 3x^3$ y $B(x) = x^3 - 9x$

b) $C(x) = x^4 - 4x^2$ y $D(x) = x^3 - 4x$

c) $E(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ y $F(x) = x^3 - 8x^2 + 21x - 18$

E. FÓRMULAS CARDANO VIETA

4.51. Hallar el discriminante de cada ecuación y, sin resolverlas, indicar su número de soluciones:

a) $5x^2 - 3x + 1 = 0$ (Soluc: \exists / soluc)

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$ (Soluc: 1 sol)

c) $3x^2 - 6x - 1 = 0$ (Soluc: 2 sol)

d) $5x^2 + 3x + 1 = 0$ (Soluc: 0 sol)

4.52. Determinar para qué valores de m la ecuación $2x^2 - 5x + m = 0$:

a) Tiene dos soluciones distintas

b) Tiene una solución

c) No tiene solución

4.53. Determinar para qué valores de b la ecuación $x^2 - bx + 25 = 0$:

- a) Tiene dos soluciones distintas. (Sol: $b < -10$ o $b > 10$)
- b) Tiene una solución. (Sol: $b = \pm 10$)
- c) No tiene solución. (Sol: $-10 < b$)

4.54. Un alumno indica en un examen que las soluciones de $x^2 + 4x + 3 = 0$ son 2 y 5. Utilizar las relaciones de Cardano-Vieta para razonar que ello es imposible.

4.55. Inventar, razonadamente, una ecuación de 2º grado $x^2 + ax + b = 0$:

- a) Que tenga dos soluciones. b) Que tenga una solución. c) Que no tenga solución.

4.56. Hallar el valor de los coeficientes b y c en la ecuación $7x^2 + bx + c = 0$ sabiendo que sus soluciones son $x = 5$ y $x = -6$ (Sol: $b = 7, c = -210$)

4.57. Calcular el valor del coeficiente b en la ecuación $5x^2 + bx + 6 = 0$ sabiendo que una de sus soluciones es 1 ¿Cuál es la otra solución? (Sol: $b = -11; x = 6/5$)

4.58. Calcular el valor de a y b para que la ecuación $ax^2 + bx - 1 = 0$ tenga por soluciones $x = 3$ y $x = -2$ (Sol: $a = 1/6, b = -1/6$)

4.59. ¿Para qué valores de a la ecuación $x^2 - 6x + (3 + a) = 0$ tiene solución única? (Soluc: $a = -6$)

4.60. Inventar una ecuación de 2º grado con raíces $x = 2/3$ y $x = 2$, y cuyo coeficiente cuadrático sea 3

4.61. Sin resolver y sin sustituir, ¿cómo podemos asegurar que las soluciones de $x^2 + 5x - 300 = 0$ son $x = 15$ y $x = -20$?

4.62. Si $p \in \mathbb{R}$ y las raíces de $x^3 + 2px^2 - px + 10 = 0$ están en progresión aritmética, calcula dichas raíces.

F. FRACCIONES ALGEBRAICAS

4.71. Simplifica al máximo las siguientes fracciones algebraicas,

a) $\frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$ b) $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$ c) $\frac{x^2 + x}{x^3 - 2x^2 + x}$ d) $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2}$

4.72. Opera y simplifica al máximo las siguientes expresiones algebraicas,

a) $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1}$ b) $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^3}$ c) $\frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x-2}$
d) $\frac{x+1}{x^2-x} - \frac{3}{x}$ e) $\frac{x+2}{x^2-2x+1} + \frac{2x}{x^2-1}$ f) $\frac{x-1}{2x-6} - \frac{2}{x-3}$

4.73. Factoriza y simplifica al máximo primero y luego opera,

a) $\frac{x^2-4}{x^2} \cdot \frac{2x}{x+2}$ b) $\frac{x^2}{x^2-x} : \frac{x^3}{x^2-2x+1}$ c) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-9} \cdot \frac{2x+6}{2x^2-4x}$

d) $\frac{x^2-x}{x^2-5x+6} : \frac{x}{x-2}$ e) $\frac{x^4}{x^3-16x} \cdot \frac{x^2+4x}{x^2}$ f) $\frac{x^2-1}{4x^2} : \frac{x+1}{2x^2}$

4.74. Opera y simplifica al máximo,

a) $\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right) : \frac{1}{x^3} =$ b) $\left(\frac{x}{x-1} - \frac{x-1}{x}\right) \cdot \frac{x^2-x}{2x-1} =$
c) $\frac{1}{x} - \frac{x}{x-1} : \left(\frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x+1}\right) =$ d) $\frac{1}{x-10} - \frac{2x^2-4}{x} \cdot \left(\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-2}\right) =$

4.75. Opera y simplifica al máximo,

a) $\frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} =$ b) $\frac{\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^3}} =$ c) $\frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} =$
d) $\frac{\frac{x^2+x-1}{x^2-1} - 1}{\frac{1}{x-1} + 1}$ e) $\frac{\frac{4}{x} - x}{\frac{2}{x} - 1} =$ f) $\frac{x^2 - \frac{x^4+x^2-x}{x^2+1}}{1 - \frac{1}{x+1}}$

F. INECUACIONES

4.81. Resuelve las siguientes inecuaciones de primer grado,

a) $2x - 3 \geq 3 \cdot (x - 2)$

b) $\frac{5x + 2}{3} \leq x + 1$

c) $1 + 5x > 3 \cdot (x - 2)$

d) $1 - x \leq 3 + 2x$

e) $(x - 1)^2 < (x - 2)^2 + 1$

f) $(2x - 1) \cdot (2x + 1) \leq (2x + 1)^2$

4.82. Resuelve las siguientes inecuaciones de primer grado,

a) $\frac{x - 1}{2} - \frac{2 - 3x}{3} < 3 - \frac{2x + 1}{4}$

b) $\frac{2x + 4}{3} - \frac{x}{7} \geq \frac{1}{6}$

c) $\frac{4x}{9} - \frac{2x - 1}{3} \leq 1 + \frac{4 + 3x}{2}$

d) $x - \frac{1}{2} \cdot \left(3 - \frac{x}{5}\right) \geq \frac{x - 2}{5}$

e) $2 \cdot (x - 1) - \frac{4x}{3} > 3 \cdot \left(\frac{3x}{2} - \frac{x}{3}\right)$

f) $\frac{x^2 + 2}{4} - \frac{1 + 4x}{6} \leq \frac{2x^2 - 5}{8}$

4.83. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado,

a) $x^2 - 6x + 5 < 0$

b) $9x^2 + 3x - 2 \geq 0$

c) $2x^2 > 6 + 4x$

d) $(x - 3) \cdot (x + 5) \geq -7$

e) $x \cdot (x - 1) < x + 3$

f) $(x - 2) \cdot (2x - 3) \geq 0$

g) $\frac{x^2 - 5}{4} - \frac{x + 1}{3} > \frac{x - 2}{6}$

h) $\frac{1 + x^2}{5} - \frac{3x + 1}{10} \geq x - \frac{x^2 - 3}{3}$

i) $x^2 - \frac{x + 3}{4} < \frac{x - 1}{3}$

4.84. Resuelve las siguientes inecuaciones de grado superior a dos,

a) $x^3 + 4x^2 + x - 6 < 0$

b) $x \cdot (x^2 + 3x - 4) \geq 0$

c) $x^4 - 10x^2 + 9 \leq 0$

d) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 > 0$

e) $x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8 < 0$

f) $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \geq 0$

g) $x^3 - 4x \geq 0$

h) $x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 11x + 6 < 0$

i) $(x - x^2 + 2) \cdot (x - 3) \leq 0$

4.85. Resuelve las siguientes inecuaciones racionales,

a) $\frac{x+2}{x^3-25x} < 0$

b) $\frac{2x+1}{x-1} \geq 0$

c) $\frac{x^2+9-6x}{x^2+2x} < 0$

d) $\frac{1}{x+3} \geq 0$

e) $\frac{x^2+10x+25}{x^2+5x} < 0$

f) $\frac{x+2}{3x-6} \leq -1$

g) $\frac{9}{x^2-16} < 1$

i) $\frac{x+2}{x^3-x} \geq 0$

j) $\frac{x^2+11}{x+3} \geq 3$

k) $\frac{2x-8}{x^2-5x+6} \geq 0$

l) $\frac{x^2-4}{x^2+5x-6} \geq 0$

m) $\frac{x^2-2x-3}{x^2-9} < 0$

4.86. Resuelve las siguientes inecuaciones determinando el intervalo o intervalos y semirrectas solución,

a) $\left. \begin{array}{l} 3x-2 < 0 \\ x+1 \geq 0 \end{array} \right\}$

b) $\left. \begin{array}{l} x^2-4 \leq 0 \\ 1-2x \geq 0 \end{array} \right\}$

c) $\left. \begin{array}{l} x^2-4x+3 > 0 \\ x^2-2x < 0 \end{array} \right\}$

d) $\left. \begin{array}{l} x^3-x > 0 \\ 9-x^2 < 0 \end{array} \right\}$

e) $\left. \begin{array}{l} \frac{x}{x-1} \leq 0 \\ x^2-2x \geq 0 \end{array} \right\}$

f) $\left. \begin{array}{l} \frac{x^2}{x^2-9} \leq 0 \\ \frac{x-1}{x+2} < 0 \end{array} \right\}$

4.87. Resuelve las siguientes inecuaciones,

a) $x \cdot e^{x-1} < 0$

b) $(3x-1) \cdot \log(x-2) \geq 0$

c) $\frac{\log x}{x^2-1} < 0$

d) $|x^2-4| \geq 0$

e) $|x^2-5x+6| < 0$

f) $|3-x^2| \leq 0$

g) $\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) < 0$

i) $\log_2\left(\frac{x+1}{x}\right) \geq 0$

j) $\log_5\left(\frac{x^2+9}{x-1}\right) < 0$

k) $\sqrt{x^2+3x+2} \geq 0$

l) $\sqrt[3]{9x^2-16} < 0$

m) $\sqrt{x^2+2x} \leq 0$

4.88. Resuelve las siguientes inecuaciones determinando la región del plano solución,

a) $\left. \begin{array}{l} x+y > 1 \\ x-2y < 3 \\ y < 0 \end{array} \right\}$

b) $\left. \begin{array}{l} 3x-y \leq 2 \\ 2x+y < 1 \\ y > 0 \end{array} \right\}$

c) $\left. \begin{array}{l} -x+y \geq 1 \\ x-y > 3 \\ y > 0, x < 3 \end{array} \right\}$

d) $\left. \begin{array}{l} 2x-3y \geq 2 \\ 3x+y < 1 \\ y > -1, x < 1 \end{array} \right\}$

e) $\left. \begin{array}{l} x+3y \geq 6 \\ 4x-2y \leq 0 \\ y > -2, x \leq 3 \end{array} \right\}$

f) $\left. \begin{array}{l} -3x+y < 3 \\ x-4y > 2 \\ x-y < 2 \end{array} \right\}$