1 ºBACH.– MATEMÁTICAS I
RECUENTO. COMBINATORIA. INDUCCIÓN MATEMÁTICA

UNIDAD 3

A. NÚMEROS FACTORIALES Y COMBINATORIOS.

3.1. Calcula:

$a)\ 3\,!$ $\qquad b)\ 5\,!$ $\qquad c)\ 7\,!$ $\qquad d)\ 4\,!$

3.2. Simplifica al máximo,

$a)\ \dfrac{15\,!}{18\,!}$ $\qquad b)\ \dfrac{23\,!}{20\,!}$ $\qquad c)\ \dfrac{33\,!\cdot 2!}{35\,!}$ $\qquad d)\ \dfrac{47\,!}{44\,!\cdot 3\,!}$

3.3. Calcula:

$a)\ \binom{6}{2}$ $\qquad b)\ \binom{10}{3}$ $\qquad c)\ \binom{12}{0}$ $\qquad d)\ \binom{32}{32}$

$e)\ \binom{9}{2}$ $\qquad f)\ \binom{7}{1}$ $\qquad g)\ \binom{10}{7}$ $\qquad h)\ \binom{9}{7}$

3.4. Simplifica al máximo,

$a)\ \binom{9}{4}+\binom{9}{5}$ $\qquad b)\ \dfrac{2\,!}{4\,!}-\dfrac{5\,!}{6\,!}$ $\qquad c)\ \binom{5}{2}-\binom{5}{3}$ $\qquad d)\ \dfrac{4\,!}{9\,!}:\dfrac{6\,!}{7\,!}$

3.5. Un nuevo modelo de matrículas para coches está formado por tres letras seguidas de tres números repetidos o no. ¿Cuántos coches se podrán matricular por este sistema teniendo en cuenta que se utilizan todas las letras de un alfabeto de 25 letras y el sistema de numeración decimal?

3.6. Una cafetería vende 10 tipos de café diferentes.

(a) Cinco amigas quieren tomar cada una un café diferente al de las demás. ¿Cuántas formas posibles tienen de hacerlo?

(b) Si María y Alba quieren tomar el mismo café y las demás, siempre distintos al resto, ¿Cuántos modos tendrán de hacerlo?

3.7. Ocho chicos y dos chicas están sentados en un banco. Determine el número de disposiciones posibles, sabiendo que

(a) las chicas no se sientan juntas;

(b) las chicas no se sientan en ninguno de los dos extremos;

(c) las chicas no se sientan en ninguno de los dos extremos y tampoco se sientan juntas.

3.8. Una familia, formada por los padres y tres hijos, van al cine. Se sientan en cinco butacas consecutivas, ¿de cuántas maneras podrán sentarse si los padres se sientan en los extremos?

3.9. ¿De cuántas formas distintas pueden tres chicas y dos chicos en una fila de butacas de un cine teniendo en cuenta que no pueden estar dos chicos juntos ni dos chicas juntas?

3.10. ¿De cuántas formas se pueden sentar seis personas en una fila de butacas de un cine?

3.11. Con las letras de la palabra PARTIDO: a) ¿cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer?; b) ¿Cuántas empiezan por P?; c) ¿Cuántas empiezan por PAR? i son distintos?

3.12. ¿De cuántas formas distintas pueden llegar a la meta cuatro atletas en una carrera?

3.13. ¿Cuántas palabras distintas se pueden escribir con las letras de SOBRE, utilizando todas y sin repetir letras?

3.14. ¿Cuántos números distintos de cinco cifras se pueden formar con los mismos dígitos del número 12142?

3.15. ¿Cuántas palabras distintas de 11 letras se pueden formar con las mismas letras de la palabra MATEMATICAS utilizando todas las letras de la palabra?

3.16. En una urna hay tres bolas rojas, tres verdes, cuatro negras y dos azules. Si las bolas del mismo color son indistinguibles, ¿Cuántas combinaciones de colores distintas pueden sacarse, bola a bola, de la urna?

3.17. ¿Cuántas quinielas de 14 resultados debemos sellar para estar seguros de obtener 14 aciertos si entendemos que va a haber ocho "1", cuatro "x" y dos "2".

B. PROBLEMAS MEDIANTE VARIACIONES

3.21. ¿Cuántos números de 6 cifras se pueden escribir con los dígitos 1, 2 y 3 si puede haber repetición de números?

3.22. Con los dígitos 1, 3, 5 y 7, ¿cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar? ¿Y cuántos si se pueden repetir las cifras?

3.23. En una carrera ciclista participan 30 corredores, al llegar a la meta se entregan tres premios distintos a distintos corredores. ¿De cuántas formas se podrá realizar la entrega?

3.24. ¿Cuántos números capicúa de cuatro cifras se pueden formar con las cifras 1, 2, 3?

3.25. ¿Cuántos números capicúa de cinco cifras se pueden formar con las cifras 1, 2, 3?

3.26. En un campeonato de fútbol participan 12 equipos. ¿De cuántas maneras se pueden ocupar los tres primeros puestos?

3.27. ¿Cuántos resultados distintos pueden aparecer al lanzar un dado hexaédrico 4 veces?

3.28. ¿Cuántos números hay entre 2000 y 3000 que tengan sus cifras diferentes?

3.29. Con las cifras 1, 2, 3, 4 y 5, ¿cuántos números distintos de tres cifras distintas se pueden formar de modo que el 5 ocupe siempre el lugar de las decenas?

3.30. Cuántas palabras distintas de hasta 5 letras se pueden escribir con las letras de SOBRE, sin repetir letras?

3.31. ¿Cuántas columnas tenemos que cubrir para acertar seguro una quiniela?. Cada columna tiene 14 resultados a elegir entre 1, X, 2.

3.32. El alfabeto Morse utiliza los signos . y -. Utilizando como máximo cuatro de estos signos, ¿cuántas secuencias distintas puedes formar?

3.33. Con los números 2, 5, 7 y 9: a)¿Cuántos números de tres cifras puedes formar si se pueden repetir dígitos? b)¿Cuántos números de tres cifras distintas puedes formar?; c) ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas puedes formar?; d)¿Cuántos de los números del apartado b) son pares?

3.33. Cuántos números de tres cifras se pueden formar con las cifras pares 1, 2, 3 y 4 sin que se repita ninguna? b) ¿Cuántos terminan en 34? c) ¿Cuántos habrá que sean mayores que 300?

3.35. ¿De cuántas formas diferentes se pueden cubrir los puestos de presidente, secretario y tesorero de un club deportivo sabiendo que hay 10 candidatos?; b) Si el puesto de presidente ya está asignado a uno de ellos ¿de cuántas formas se pueden cubrir los otros dos puestos?

C. PROBLEMAS MEDIANTE COMBINACIONES

3.41. En una clase de 20 alumnos se van a rifar 3 becas al azar. ¿Qué número total de posibilidades habrá en la rifa?

3.42. Se juega un torneo de tenis entre 10 jugadoras por el sistema de liga en una misma pista. a) ¿Cuántos partidos habrán de jugarse en total?

3.43. Queremos elegir un grupo de seis personas que representen a los bachilleratos internacionales 1º E y 1º F de bachillerato. Para ello, elegimos tres personas de 1º E de bachillerato y otras tres de 1º F bachillerato. Si en 1º E hay 21 personas y en 1º F hay 17 personas, ¿Cuántos grupos de seis personas podremos formar?

3.44. En una reunión participan 12 profesores; siete son hombres y cinco son mujeres. Un grupo de cinco de estos profesores salen a comer juntos. Determine el número de grupos distintos que se pueden formar en cada una de las siguientes situaciones:

(a) En el grupo hay más hombres que mujeres.

(b) Dos de los profesores, Gary y Gerwyn, se niegan a ir a comer juntos.

3.45. Te enseñan 6 DVD para que elijas 3 como regalo. ¿Cuántas elecciones diferentes puedes hacer?

3.46. Un entrenador dispone de 12 jugadores para formar un equipo de baloncesto. ¿Cuántos quintetos puede formar sin atender a los puestos?

3.47. ¿Cuántas opciones tienes, si debes escoger tres asignaturas entre seis optativas?

3.48. Un matrimonio quiere invitar a sus amigos a cenar. Debido a las dimensiones de su casa sólo puede invitar a 5 de cada vez. Si quieren invitar a 10 amigos. ¿De cuántas maneras puede invitar a 5 de ellos?, ¿En cuántas cenas habrán podido invitar a todos?

3.49. En un determinado programa de televisión quieren contratar a cuatro presentadores de entre los de la emisora. Si en la emisora hay 10 presentadores, ¿cuál es el número total de posibilidades del elenco de presentadores para el programa?

3.50. En una clase hay 10 niños y 5 niñas. a) ¿De cuántas maneras puede escoger el profesor un grupo de 3 de entre todo su alumnado?, ¿en cuántos grupos habrá una sola niña?

3.51. Se quiere preparar una salsa con tres ingredientes. Si disponemos de siete ingredientes en la despensa. ¿Cuántas salsas distintas se podrían preparar?

3.52. Quiero regalar a mi amiga dos libros de entre 15 que sé que le gustan. ¿De cuántas formas puedo hacerlo?

3.53. Se quiere formar un equipo de futbol-sala (cinco jugadores) de un total de 10. Si sólo tenemos un portero, ¿cuántos equipos distintos podemos formar?

3.54. En una estantería hay 6 libros de matemáticas y 3 de física. Queremos coger 2 de cada. ¿De cuántas maneras podemos hacerlo?

3.55. Para hacer una apuesta en la lotería primitiva hay que marcar con cruces seis números (donde figuran números del 1 al 49). ¿De cuántas formas diferentes puede marcar una persona?

3.56. En un centro escolar hay 40 alumnos en 1º de ESO, 35 alumnos en 2º ESO, 32 en 3º ESO y 28 en 4º ESO. Para hablar con la dirección se quiere formar una comisión que esté integrada por DOS alumnos de cada nivel educativo. ¿Cuántas comisiones se pueden formar?

3.57. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir las ocho últimas localidades de un partido de fútbol entre los doce aficionados que aún esperan en la cola de entrada?

3.58. A un congreso asisten 60 personas de las cuales 40 sólo hablan inglés y 20 sólo alemán. ¿Cuántos diálogos entre dos personas se pueden establecer sin intérprete?

3.59. Todas las personas que asisten a una reunión se estrechan la mano. Si hubo 105 apretones, ¿cuántas personas asistieron?

3.60. Ocho amigos van de viaje llevando para ello dos coches. Si deciden ir 4 en cada coche. a) ¿De cuántas formas pueden ir si todos tienen carnet de conducir? b) ¿De cuántas formas pueden ir si sólo dos tienen carnet de conducir?

3.61. Una persona tiene 6 camisetas distintas 5 pantalones distintos y 4 pares de calzado diferentes. Si elige cuatro camisetas, tres pantalones y dos pares de calzado para hacer la maleta, ¿cuántas posibilidades podría llevar en la maleta?

3.62.¿Cuántos planos distintos determinan 6 puntos en el espacio, si nunca hay más de 3 en un mismo plano? (Nota: tres puntos determinan un plano)

3.63.¿Cuántos triángulos se pueden formar con los vértices de un pentágono regular?

3.64. Con los números 3, 5, 6, 7 y 9 ¿cuántos productos distintos se pueden obtener multiplicando dos de estos números? ¿Cuántos de ellos son múltiplos de 2?

E. INDUCCIÓN MATEMÁTICA

3.71. Demuestra por inducción matemática la que la suma de los n primeros números naturales es igual a

$$\frac{(1+n)\cdot n}{2}$$

3.72. Demostrar mediante el método de inducción,

$$a)\ 1^2+2^2+3^2+\ \dots\ +n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}\quad ,\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$b)\ \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ \dots\ +\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}\quad ,\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$c)\ 1^3+2^3+3^3+\ \dots\ +n^3=\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2\quad ,\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$d)\ 2+4+6+8+\ \dots\ +2n=n\cdot(n+1)\quad ,\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$e)\ 1\cdot 3\cdot 5\cdot \dots\cdot(2n-1)=\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}\quad ,\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$f)\ 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+\cdots+n\cdot(n+1)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}\quad ,\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$g)\ 1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+4\cdot 6+\cdots+n\cdot(n+2)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+7)}{6}\quad ,\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

3.73. Demuestra por inducción matemática que la suma de los n términos consecutivos $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ de una progresión aritmética de diferencia d es igual a,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$$

3.74. Demuestra por inducción matemática que

$$\sum_{k=1}^{n} 3^k=\frac{3^{n+1}-3}{2}$$

3.75. Demuestra por inducción matemática que la suma de los n términos consecutivos $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ de una progresión geométrica de razón r es igual a,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$$

3.76. Demostrar mediante el método de inducción,

$$n^3 + 2n \text{ es divisible entre } 3\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

3.77. Demostrar por inducción, que si k es un natural impar, $7^k + 1$ es divisible por 8.

3.78. Pruebe que 5 es divisor de $n^5 - n$ para todo entero positivo n.

3.79. Pruebe que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos cualesquiera es múltiplo de 9.

3.80. Pruebe que para cualquier valor impar n, el valor $n^2 - 1$ es divisible entre 8.

3.81. Pruebe que $2^n > n$ para todo entero positivo n

3.82. Pruebe que $4^n > n^4$, para todo natural $n > 3$.

3.83. Pruebe que $n! > 3^{n-2}$, para todo natural $n \geq 3$.

3.84. Pruebe que $(3n)! \;>\; 2^{6n-4}$ para todo entero positivo n.

3.85. Pruebe que $(1+x)^n \geq 1 + nx$ para todo entero positivo n con $x > -1$ un valor cualquiera.