1 º BACH. – MATEMÁTICAS I

LA DERIVADA. DERIVADAS SUCESIVAS. APLICACIONES A LA REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES. OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

UNIDAD 10

A. CÁLCULO DE DERIVADAS

10.1. Deriva las siguientes funciones aplicando la definición de derivada.

$a)\ f(x) = 5x\ \ en\ x = 1$ $\quad b)\ g(x) = x^2\ \ en\ x = -2$ $\quad c)\ h(x) = 2x - 1\ en\ x = 2$

$d)\ i(x) = x^3\ \ en\ x = -1$ $\quad e)\ i(x) = x^4 - 1\ en\ x = 1$ $\quad f)\ j(x) = (x+1)^3\ en\ x = 0$

10.2. Deriva las siguientes funciones polinómicas,

$a)\ f(x) = 5$ $\quad b)\ g(x) = 4x$ $\quad c)\ h(x) = x^7$

$d)\ i(x) = 4x^5$ $\quad e)\ i(x) = 2x^3 + 2x - 1$ $\quad f)\ j(x) = 5x^4 - x^2 - x + 3$

$g)\ k(x) = x^3 + \dfrac{2x^2}{4} + 2x$ $\quad h)\ l(x) = \dfrac{2x^5}{3} - 4x^3 - 5$ $\quad i)\ m(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x$

10.3. Aplica la regla de la derivada de la multiplicación para derivar las siguientes funciones,

$a)\ f(x) = (4x+2)\cdot\left(x^5 - \dfrac{x}{2} + 1\right)$ $\quad b)\ g(x) = (x^2 - 6x - 12)\cdot\left(x^2 + \dfrac{2x}{3} + \dfrac{1}{2}\right)$

$e)\ j(x) = (2 - 3x^2)\cdot(5 - x + x^3)$ $\quad f)\ k(x) = x^4\cdot(x^3 - 2x^2 + 1)$

10.4. Calcula las siguientes derivadas de funciones racionales,

$a)\ f(x) = \dfrac{x}{1-2x}$ $\quad b)\ g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 3x}$ $\quad c)\ h(x) = \dfrac{3x+1}{2x-1}$ $\quad d)\ i(x) = \dfrac{2x^3 + 2x}{x^2 - 1}$

$e)\ j(x) = \dfrac{x^2 - x}{3x+2}$ $\quad f)\ k(x) = \dfrac{3}{x+2}$ $\quad g)\ l(x) = \dfrac{x^2 + x - 3}{2x - 1}$ $\quad h)\ m(x) = \dfrac{4}{1-x}$

10.5. Calcula las siguientes derivadas de composiciones de funciones potenciales, funciones racionales y productos de funciones,

$a)\ f(x) = (5x-2)^3$ $\quad b)\ g(x) = (x^2 - 3x + 6)^5$ $\quad c)\ h(x) = (1 - x^3)^5$

$d)\ i(x) = \left(\dfrac{2}{x-1}\right)^5$ $\quad e)\ i(x) = \left(\dfrac{x^2 - 3x}{x^2 + 2}\right)^5$ $\quad f)\ j(x) = \dfrac{(1+2x)^2}{3-x}$

$g)\ k(x) = x^3\cdot\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^4$ $\quad h)\ l(x) = (2-x)^2\cdot\dfrac{1}{3x}$ $\quad i)\ m(x) = \dfrac{2x^3}{(x^3-1)^2}\cdot(4-x)$

10.6. Calcula las siguientes derivadas de funciones irracionales,

$a)\ f(x) = \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}}$ $\quad b)\ g(x) = \sqrt[3]{x^3 - 4x + 1}$ $\quad c)\ h(x) = \sqrt[5]{(x-1)\cdot(x^2+2)}$

$d)\ i(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{x^2}$ $\quad e)\ i(x) = \sqrt[3]{\frac{3x}{2x^2-6}}$ $\quad f)\ j(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{3-x^2}}$

10.7. Calcula las siguientes derivadas de funciones exponenciales,

$a)\ f(x) = e^{3x-1}$ $\quad b)\ g(x) = 2^{\frac{4x^2}{x-1}}$ $\quad c)\ h(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^{2x^3-x}$

$d)\ i(x) = \frac{e^{\sqrt{2x}}}{(x-1)^2}$ $\quad e)\ i(x) = 3^{5x+1}\cdot\sqrt[3]{2x+1}$ $\quad f)\ j(x) = \left(4^{x^2+1} + x^3\right)^4$

10.8. Calcula las siguientes derivadas de funciones logarítmicas,

$a)\ f(x) = \ln(x^2 - 3x + 1)$ $\quad b)\ g(x) = \log\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$ $\quad c)\ h(x) = \frac{\log_3(1-x)}{e^{1/x^2}}$

$d)\ i(x) = (\log_2(e^{-x}))^3$ $\quad e)\ i(x) = 2^{3x+1}\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad f)\ j(x) = \frac{5^{x^3+2x}}{\log(1-x)}$

10.9. Calcula las siguientes derivadas de funciones trigonométricas,

$a)\ f(x) = sen(2x+1)$ $\quad b)\ g(x) = \cos(e^x - 1)$ $\quad c)\ h(x) = \frac{tan(3x^2+1)}{x^3}$

$d)\ i(x) = sen^2(5x^2+1)$ $\quad e)\ i(x) = \cos\left(\frac{x}{x-1}\right)$ $\quad f)\ j(x) = \tan\left(\frac{e^{3x}}{x}\right)$

$g)\ i(x) = \sqrt{4 - sen^3(2x)}$ $\quad h)\ i(x) = \frac{sen\ x}{\cos^2(2x)}$ $\quad i)\ j(x) = \cos\left(\frac{e^{3x}}{x}\right)$

10.10. Calcula las siguientes derivadas de funciones arco,

$a)\ f(x) = arcsen\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$ $\quad b)\ g(x) = arc\cos(e^{-x})$ $\quad c)\ h(x) = \arctan(x^2-1)$

$d)\ i(x) = arcsen\left(\frac{1}{x-1}\right)$ $\quad e)\ i(x) = \arccos\left(\sqrt{1-x}\right)$ $\quad f)\ j(x) = arc\tan\left(\frac{1}{2x}\right)$

$g)\ i(x) = e^x\cdot arcsen(2x)$ $\quad h)\ i(x) = \frac{\arccos x^2}{\cos x^2}$ $\quad i)\ j(x) = x\cdot\arctan(x)$

B. ECUACIÓN RECTA TANGENTE A UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

10.11. Halla la pendiente de la recta tangente a las curvas siguientes en el punto de abscisa que se indican. Escribe la ecuación de dicha recta.

$a)\ \ Recta\ tangente\ a\ f(x) = (1+2x)^2 \quad en\ x = 1$

$b)\ \ Recta\ tangente\ a\ g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}} \quad en\ x = 2$

$c)\ \ Recta\ tangente\ a\ h(x) = \dfrac{x}{(3x-1)^3} + 2x \quad en\ x = 3$

$d)\ \ Recta\ tangente\ a\ i(x) = sen\ 2x \quad en\ x = \pi/4$

10.12. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, que es paralela a la recta $2x + 3y - 1 = 0$.

10.13. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f\,(x) = \frac{3}{x+1}$, que es paralela a la recta $3x - 2y + 4 = 0$.

C. MONOTONÍA Y EXTREMOS RELATIVOS

10.21. Calcula los extremos relativos (máximos y mínimos) y la monotonía de las siguientes funciones polinómicas,

$a)\ \ f(x) = x^4 - 4x + 1 \qquad b)\ \ g(x) = 2x^3 - 6x - 1$

$d)\ \ i(x) = x^5 - 15x^3 + 2 \qquad e)\ \ i(x) = x^2 - 3x + 2$

$g)\ \ k(x) = -x^3 - 3x + 2 \qquad h)\ \ l(x) = x^4 - 2x^3 - 3$

10.22. Calcula los extremos relativos (máximos y mínimos) y la monotonía de las siguientes funciones racionales,

$a)\ \ f(x) = \dfrac{1}{x} \qquad b)\ \ g(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

$d)\ \ i(x) = \dfrac{2x}{3x-6} \qquad e)\ \ i(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

$g)\ \ k(x) = \dfrac{4x}{x+3} \qquad h)\ \ l(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$

10.23. Calcula los extremos relativos (máximos y mínimos) y la monotonía de las siguientes funciones potenciales,

$a)\ f(x) = (x^2 - 1)^3$ $\qquad b)\ g(x) = (x^3 - 3x)^5$

$d)\ i(x) = (2x + 1)^4$ $\qquad e)\ i(x) = \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^2$

10.24. Estudiar los extremos relativos y la monotonía de las siguientes funciones,

$a)\ f(x) = x^3 - 12x$ $\qquad b)\ g(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 3}$ $\qquad c)\ h(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$

$d)\ i(x) = \frac{x^2}{2x - 2}$ $\qquad e)\ j(x) = x^3 - 3x + 2$ $\qquad f)\ g(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

10.25. Halla los extremos, si los tiene, de la función f(x) = $x^3 - 6x^2 + 9x$. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

10.26. Estudiar los extremos relativos y la monotonía de la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

10.27. Estudia la monotonía de la función $f(x) = \sqrt{x - 3}$

10.28. Estudia los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = x^4 - 6x^2$ $\qquad b)\ g(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$ $\qquad c)\ h(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$

$d)\ i(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$ $\qquad e)\ j(x) = x^4 - 12x$ $\qquad f)\ k(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

10.29. Considera la función f (x) = $2x^3 + 9x^2 + 12x + 1$

a) Estudia su crecimiento y halla sus máximos y mínimos.

b) Estudia su curvatura y obtén sus puntos de inflexión.

10.30. Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función

$$f(x) = (x - 2)^2 \cdot (x + 1).$$

determinando dónde es creciente, decreciente, cóncava y convexa.

C. PROBLEMAS SOBRE CÁLCULO DE CARACTERÍSTICAS BÁSICAS DE UNA FUNCIÓN MEDIANTE DERIVADAS Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA.

10.31. Dada la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 9$. Se pide:

a) Calcular el dominio de la función.

b) Calcular los puntos de corte de la función.

c) Calcular los extremos relativos y los intervalos de crecimiento.

d) Estudiar la existencia de puntos de inflexión y la curvatura.

e) Representar la función.

10.32. Sea la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$. Se pide:

a) Calcular el dominio de la función.

b) Calcular los puntos de corte de la función.

c) Calcular los extremos relativos y los intervalos de crecimiento.

d) Estudiar la existencia de puntos de inflexión y la curvatura.

e) Representar la función.

10.33. Dada la función $f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x-1}$. Se pide:

a) Calcular el dominio de la función.

b) Calcular las asíntotas de la función.

c) Calcular los puntos de corte de la función.

d) Calcular los extremos relativos y los intervalos de crecimiento.

e) Estudiar la existencia de puntos de inflexión y la curvatura.

f) Representar la función.

10.34. Dada la función $f(x) = \frac{(x-3)^2}{x+3}$. Se pide:

a) Calcular el dominio de la función.

b) Calcular las asíntotas de la función.

c) Calcular los puntos de corte de la función.

d) Calcular los extremos relativos y los intervalos de crecimiento.

e) Estudiar la existencia de puntos de inflexión y la curvatura.

f) Representar la función.

10.35. Dada la función $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x}$. Se pide:

a) Calcular el dominio de la función.

b) Calcular las asíntotas de la función.

c) Calcular los puntos de corte de la función.

d) Calcular los extremos relativos y los intervalos de crecimiento.

e) Estudiar la existencia de puntos de inflexión y la curvatura.

f) Representar la función.

10.36. Dada la función $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-4}$. Se pide:

a) Calcular el dominio de la función.

b) Calcular las asíntotas de la función.

c) Calcular los puntos de corte de la función.

d) Calcular los extremos relativos y los intervalos de crecimiento.

e) Estudiar la existencia de puntos de inflexión y la curvatura.

f) Representar la función.

10.37. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{2(x-1)}$. Se pide:

a) Calcular el dominio de la función.

b) Calcular las asíntotas de la función.

c) Calcular los puntos de corte de la función.

d) Calcular los extremos relativos y los intervalos de crecimiento.

e) Estudiar la existencia de puntos de inflexión y la curvatura.

f) Representar la función.

10.38. Dada la función $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$. Se pide:

a) Calcular el dominio de la función.

d) Calcular los puntos de corte de la función.

c) Escribir la función a trozos.

d) Calcular los extremos relativos y la monotonía de la función.

d) Estudiar la existencia de puntos de inflexión y la curvatura.

e) Representar la función.

10.39. Dada la función $f(x) = |x^3 - 3x - 2|$. Se pide:

a) Calcular el dominio de la función.

d) Calcular los puntos de corte de la función.

c) Escribir la función a trozos.

d) Calcular los extremos relativos y la monotonía de la función.

d) Estudiar la existencia de puntos de inflexión y la curvatura.

e) Representar la función.

10.39. Dada la función $f(x) = \frac{|x-2|}{x}$ Se pide:

a) Calcular el dominio de la función.

d) Calcular los puntos de corte de la función.

c) Escribir la función a trozos.

d) Calcular las asíntotas de la función.

e) Calcular los extremos relativos y la monotonía de la función.

f) Estudiar la existencia de puntos de inflexión y la curvatura.

g) Representar la función.

10.40. Dada la función $f(x) = \frac{|x^2-9|}{x-1}$ Se pide:

a) Calcular el dominio de la función.

d) Calcular los puntos de corte de la función.

c) Escribir la función a trozos.

d) Calcular las asíntotas de la función.

e) Calcular los extremos relativos y la monotonía de la función.

f) Estudiar la existencia de puntos de inflexión y la curvatura.

g) Representar la función.

D. PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE LA DERIVADA A CONTEXTOS REALES.

10.41. El número de visitantes diarios a una feria de turismo viene dado por la función

$$V(t) = -30 \cdot (t^2 - 14t - 11)$$

donde $t \in [0, 10]$ es el tiempo (en horas) transcurrido desde la apertura de la feria. Se pide:

a) ¿Cuándo aumenta la afluencia de público y cuándo disminuye? ¿En qué momento se alcanza el número máximo de visitantes?

b) Determina ese número máximo de visitantes.

10.42. El consumo de agua en un IES en la jornada de mañana (entre las 8:45 y las 14:45) viene dado por la función $C(t) = -0'05t^2 + 0'3t$ tal que $0 \leq t \leq 6$ en donde t es el tiempo en horas a contar desde la apertura del centro y C(t) es el consumo de agua en m^3. Se pide:

a) ¿Cuál es el consumo a las 2 $horas$ de iniciada la jornada?

b) ¿En qué momento se produce el máximo consumo y valor de éste?

10.43. La temperatura T, en grados centígrados, de una reacción química viene dada en función del tiempo t, en horas, por la expresión $T(t) = 10t \cdot (3 - t)$, en donde $0 \leq t \leq 3$. Se pide:

a) Temperatura que habrá a los 30 $minutos$ de comenzada la reacción.

b) ¿En qué momento se alcanza la máxima temperatura y cuál es ésta?

10.44. En una sesión de Bolsa el precio, en euros, que alcanza una acción viene dado por la función

$$f(t) = 2t^3 - 18t^2 + 48t + 1,$$

en donde t representa el tiempo, en horas, contado a partir del inicio de la sesión y $0 \leq t \leq 3$ Se pide:

a) Precio de la acción a las 3 horas de iniciada la sesión.

b) ¿A qué hora la acción alcanza su valor máximo? ¿Cuál es este valor?

10.45. La trayectoria seguida por un vagón de una atracción de feria viene definida por la función $f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 1$ en donde t representa el tiempo en minutos contado desde el momento en que se pone en marcha la atracción y $f(t)$ representa la altura en metros, respecto del suelo, en la que se encuentra el vagón. Se pide:

a) Tiempo que tarda el vagón en alcanzar la altura máxima y valor de ésta.

b) Si la atracción finalizara su recorrido en el minuto 4, ¿el punto de salida coincidirá con el de llegada?

10.46. El beneficio B, en miles de euros, de una sociedad de inversores, viene dado por la función $B(x) = -2x^2 + 56x + 3$ en donde x representa los miles de euros invertidos. Estudiadas las condiciones del mercado, se decide que $1 \leq x \leq 15$. Se pide:

a) Beneficio máximo.

b) Intervalos donde el beneficio crece y donde decrece.

10.47. El valor en millones de euros de una empresa en función del tiempo en años viene dado por la relación funcional $f\,(t) = 9 - (t-2)^2$ con $0 \leq t \leq 6$. ¿En qué momento alcanzó su máximo?

10.48. En una empresa de autobuses se observa que sus ingresos dependen del precio del billete según la función $I(\,t\,) = 18p - 3p^2$, siendo p el precio del billete en euros. ¿Para qué valores de p los ingresos aumentan?, ¿para cuáles disminuyen?

10.49. La producción de tomates en un invernadero depende de la temperatura que hay en el mismo mediante la expresión $P(x) = -x^3 + 48x^2 - 720x$, con $P(x)$ en kg y x en grados centígrados. ¿Entre qué valores hay que mantener la temperatura del invernadero para que la producción aumente?

10.50. Un agente comercial cobra por la venta de cierto producto una comisión dada por:

$$C(x) = 100 + \frac{x}{100} - \frac{x^2}{1000}$$

Donde x representa la cantidad en miles de euros de la venta efectuada. Determina la cantidad que habrá de vender para que la comisión sea máxima.

10.51. El número de individuos en millones de una población viene dado por la función

$$P(t) = \frac{15+t^2}{(t+1)^2},$$

donde t se mide en años transcurridos desde $t = 0$. Calcula:

a) La población inicial.

b) El año en que se alcanza la mínima población y el tamaño que tiene en ese momento.

c) El tamaño de la población a largo plazo.

10.52. Un conductor decide, a los seis minutos de iniciada la marcha $(t = 6)$ de su vehículo poner en funcionamiento el ordenador de a bordo para comprobar en cada instante el consumo de gasóleo. A los veinte minutos $(t = 20)$ de iniciada la marcha, desconecta el ordenador, realiza los cálculos pertinentes y comprueba que el consumo de combustible expresado en litros/100 km. se ajusta a la función

$$C(t) = 0.2 \cdot t \cdot (26 - t) - 19$$

en donde $t \in [6, 20]$. Se pide:

a) ¿Cuál es el consumo en el instante en que se pone en funcionamiento el ordenador de a bordo?

b) Intervalo de tiempo en el que el consumo de combustible aumenta.

c) Intervalo de tiempo en el que el consumo de combustible disminuye.

d) Instante en el que el consumo es máximo. ¿Cuál es este consumo?

e) ¿Puede haber alguna relación entre los resultados obtenidos y un posible trazado de la vía por donde circula el vehículo? Razona la respuesta.

E. PROBLEMAS SOBRE EXPRESIONES ALGEBRAICAS DE FUNCIONES CON PARÁMETROS

10.61. La función $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$ tiene un máximo en el punto $P(0, 1)$. Calcula a y b.

10.62. Halla los parámetros b y d en la función $f(x) = - x^3 + bx^2 + 2x + d$ para que tenga un punto de inflexión en $(3, 2)$.

10.63. Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + 5$, halla el valor de a para que tenga un extremo relativo (máximo o mínimo) en $x = 1$.

10.64. La función $f(x) = 2x^2 + ax + b$ tiene un mínimo en el punto $(2, - 5)$. Se pide:

a) Determina el valor de a y b.

b) Para los valores hallados en el apartado anterior, escribe el intervalo en donde la función es creciente.

10.65. La función $f(x) = ax^2 + 6x + b$ tiene un máximo en el punto $(1,4)$. Se pide:

a) Determina el valor de a y de b.

b) Para los valores hallados en el apartado anterior, escribe el intervalo en donde la función es decreciente.

10.66. Sea la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ de la que se sabe que para por el origen de coordenadas y que tiene un máximo relativo en el punto $(1, 2)$. Se pide

a) Determina los valores de a, b, y c.

b) Estudiar la monotonía y la curvatura de la función.

10.67. Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 6.$$

Se pide:

a) Calcúlense a, b para que la función f tenga un máximo relativo en $x = 1$ y un mínimo relativo en $x = 2$.

b) Para los valores calculados en el apartado a), determinar el punto de inflexión de la función.

10.68. De la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ se sabe que tiene un máximo relativo en el punto de abscisa $x = 1$, tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = -1$ y además su gráfica pasa por el punto $(2, 5)$. Se pide:

a) Determina los valores de $a, b, y\ c$.

b) Escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en su punto de inflexión.

10.69. Halla el valor de a, b, c y d para que la función $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un mínimo relativo en $(1, 0)$ y un punto de inflexión en $(2, -2)$

10.70. Halla los parámetros $a, b\ y\ c$ en la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ para que la función corte al eje de abcisas en $x = 3$ y tenga un máximo en $(0, 9)$

10.71. Halla los parámetros de $a, b, c\ y\ d$ para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un punto de inflexión en $(3, 2)$ y un mínimo relativo en $(1, -5)$.

10.72. Halla los parámetros $a, b\ y\ c$ en la función $f(x) = ax^2 + bx + x$ para que la función corte al eje de ordenadas en $y = -2$ y pase por $(1, -4)$.

F. PROBLEMAS SOBRE CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD EN FUNCIONES A TROZOS

10.81. Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \leq 1 \\ x - 2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$. Estudiar la derivabilidad en todo su dominio.

10.82. Se considera la función definida por $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x & \text{si } 0 < x \end{cases}$. Estudiar la derivabilidad de la función en su dominio.

10.83. Se considera la función definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 3/2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$. Estudiar la derivabilidad de la función en $\mathbb{R}$.

10.84. Se considera la función definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \end{cases}$. Estudiar la derivabilidad de la función en $x = 2$.

10.85. Se considera la función definida por $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x & \text{si } 0 < x \end{cases}$. Estudiar la derivabilidad de la función en $x = 0$.

10.86. Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^3 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$. Estudiar la derivabilidad en x = 1.

10.87. Sea la función definida por $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$. Calcular los valores de a y b para que la función sea derivable en x = 0.

10.88. Sea la función definida por $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$.

Calcular los valores de a y b para que la función sea derivable en $x = 0$.

10.89. Sea la función definida por $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + a & \text{si } x < 1 \\ x^3 - 2bx & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$.

Calcular los valores de a y b para que la función sea derivable en $x = 1$.

10.90. Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } 1 < x \end{cases}$.

Calcular los valores de a y b para que la función sea derivable en $x = 1$.

10.91. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + bx + c & \text{si } 0 < x \end{cases}$.

Calcular los valores de b y c para que la función sea derivable en $x = 0$.

10.92. Estudiar para qué valores de a y b la siguiente función es derivable:

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 + ax & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{a}{x} & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ \dfrac{x^2 + ax + 1}{x + 1} & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

10.93. Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x < 0 \\ ax^2+bx+c & \text{si } 0 \le x \le 3 \\ 3-x & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

a) Calcúlense a, b, c para que la función f sea continua en todos los puntos y derivable en $x = 0$.

b) Para $a = 0$, calcúlense b, c para que la función f sea continua en todos los puntos.

10.94. Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x}{\operatorname{sen} x} & \text{si } x \le 0 \\ x^2+bx+c & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

Calcúlense a y b para que la función f sea derivable en $x = 0$.

G. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

10.101. Halla dos números cuya suma sea 6 unidades y el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

10.102. ¿En qué dos partes hemos de dividir el número 12 para que su producto alcance el máximo valor posible?

10.103. Halla dos números que sumen 20 y su producto sea máximo.

10.104. Halla las dimensiones del rectángulo de mayor área que podemos cercar con una cuerda de 24cm.

10.105. Un agricultor dispone de 400 m de alambre con los que quiere vallar un campo rectangular aprovechando que un río hace ya de valla en uno de sus lados. ¿Cómo debe hacerlo para cercar la máxima superficie?

10.106. ¿Cuál es el número que sumado con 25 veces su inverso da un valor mínimo? ¿Cuál es este valor?

10.107. Dos números no negativos son tales que sumando el primero al cuadrado del segundo resulte 9. Halle estos números de manera que su suma sea tan grande como sea posible.

10.108. Un pastor dispone de $1\,000\,m$ de tela metálica para construir una cerca rectangular aprovechando una pared ya existente. ¿Podrías indicar las dimensiones para que el corral sea lo mayor posible?

10.109. Entre todos los rectángulos de perímetro $12\,cm$. ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?

10.110.. ¿Qué medidas tiene el triángulo rectángulo de máxima área entre todos los que tienen 10 cm de hipotenusa?

10.111. Una hoja de papel debe contener $18\,cm^2$ de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener $2\,cm$. cada uno, y los laterales $1\,cm$. Halla las dimensiones de la hoja para que el gasto de papel sea mínimo.

10.112. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio.

10.113. Entre todos los triángulos isósceles de perímetro $30\,cm$, ¿cuál es el de área máxima?

10.114. La suma del perímetro de un cuadrado de lado $a\,cm$, y de la circunferencia de un círculo de radio r cm es de $240\,cm$. ¿Cuál es el valor de r si la suma de las áreas ha de ser mínima?

10.115. Una empresa de productos de limpieza fabrica cajas de cartón con tapa, para comercializar un determinado tipo de detergente. Las cajas son prismas rectos de $9\,000\,cm^2$ de volumen y base rectangular de largo igual al doble de su anchura. Calcúlense las dimensiones en centímetros (largo, ancho y alto) que ha de tener cada caja para que la superficie de cartón empleada en su fabricación sea mínima.

10.116. Se desea fabricar un acuario con base cuadrada y sin tapa, de capacidad $500\,dm^3$. La base y las paredes del acuario han de estar realizadas en cristal. ¿Cuáles deben ser sus medidas para minimizar la superficie total del cristal empleado?

10.117. Un triángulo isósceles de perímetro $10\,m$ gira alrededor de la altura correspondiente a su lado desigual, engendrando un cono. Halla sus lados para que el cono tenga volumen máximo

10.118.A partir de una cartulina cuadrada de $60\,cm$ de lado se va a construir una caja de base cuadrada, sin tapa, a base de recortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas de la cartulina y doblando después de la manera adecuada. Calcular la longitud del lado de cada cuadrado a recortar para que el volumen de la caja sea máximo.

10.119. Se desea construir una lata de conservas en forma de cilindro circular recto de área total $150\ cm^2$ y volumen máximo. Determinar su generatriz y su radio.

10.120. Una ventana normanda consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo. Encontrar las dimensiones de la ventana de área máxima si su perímetro es de $10\ m$.

10.121. Dos postes de $12\ y\ 18\ m$ de altura distan entre sí $30\ m$. Se desea tender un cable que una un punto del suelo entre los dos postes con los dos extremos de estos. ¿Dónde hay que situar el punto del suelo para que la longitud del cable sea mínima?

10.122. A un placa de vidrio rectangular de 15 cm de largo y 10 cm de ancho se le ha roto en una esquina un pedazo triangular de tal modo que la longitud ha disminuido en 5cm y la anchura en 3cm. Queremos aprovechar el vidrio de manera que forme una nueva placa rectangular. ¿Cómo debemos hacer los cortes si queremos que tenga la mayor superficie posible?