CONTROL 1

Análisis y enfoques
Matemáticas I y II

Lunes 09 de OCTUBRE de 2023

50 minutos

NOMBRE: ____

APELLIDOS:____

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su nombre y apellidos en las casillas de arriba.
- No abra la prueba hasta que se lo autoricen
- En esta prueba se permite el uso de calculadora no programable.
- Conteste a todas las preguntas. Escriba sus respuestas en las casillas provistas a tal efecto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Si lo necesita, puede pedir hojas de examen para la realización de cuentas.
- Si observa que el espacio de respuesta le impide contestar completamente a alguna pregunta puede anexar una hoja adicional a este cuadernillo, que el examinador grapará al mismo. En esta hoja anexa, ponga su nombre y apellidos y el número y letra del ejercicio que extiende.
- La puntuación máxima para esta prueba es de 10 puntos.
- En la calificación de cada problema o ejercicio se tendrá en cuenta tanto la corrección de los cálculos, como la presentación y explicación correcta y ordenada de los argumentos, razonamientos y teoremas aplicados al efecto.
- No se valorarán aquellas soluciones aportadas que no muestren un razonamiento del que se derivan.
- Se tendrá en cuenta el formato, el orden, la presentación y limpieza con que se presentan los argumentos, como los cálculos y las soluciones.
- Se descontará parte de la puntuación en aquellos ejercicios y problemas en los que no se señale explícitamente como solución, los resultados a los que se llega.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse alguna puntuación, a interpretación del corrector, si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN ÚNICA

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS Y EJERCICIOS DEL CONTROL Nº 1 ANÁLISIS Y ENFOQUES

[Puntuación máxima: 2 puntos] **(Matemáticas NS, P1 Noviembre 2017, ej.1)**

1. (a) Resuelva la ecuación $log_2(x + 3) + log_2(x - 3) = 4.$ (0,75 puntos)

(b) Resuelva el sistema $\left.\begin{array}{l} 2 \cdot log_2 x - 3\, log_3 y = 4 \\ -log_2 x + 5 \cdot log_3 y = -9 \end{array}\right\}$ (1,25 puntos)

[Puntuación máxima: 1,5 puntos] (Matemáticas NS, P2 Mayo 2017, ej.6)

2. Sabiendo que $b = \log_2 a$ donde $a > 0$, escriba las siguientes expresiones en función de b.

$(i) log_2 a^3$ (0,25 puntos)

$(ii) log_2 \sqrt{8a^5}$ (0,5 puntos)

$(iii) log_8 \frac{4}{\sqrt[3]{a^2}}$ (0,75 puntos)

[Puntuación máxima: 2 puntos]

3. (a) Racionalice mediante notación radical, opere y simplifique al máximo: (1 punto)

$$\frac{12}{\sqrt[4]{4}}+\frac{3}{2\sqrt{2}-3}$$

(b) Sabiendo que $\ln 31 \approx 3{,}43$ $\ln 2 \approx 0{,}69$ y $\ln 3 \approx 1{,}1$ calcule $\ln\sqrt{\frac{31}{6}}$ sin utilizar la calculadora. (1 punto)

[Puntuación máxima: 2 puntos]

4. Resuelva las siguientes ecuaciones mediante métodos algebraicos, sin hacer uso de la calculadora,

$a)\ \ e^{x+1} - e^{1-x^2} = 0$ $(0{,}5\ puntos)$

$b)\ \ e^{x+1} + e^{1-x} = 2e$ $(1{,}5\ puntos)$

[Puntuación máxima: 2,5 puntos] **((b) Matemáticas NS, P2 Mayo 2017, ej.6)**

5. (a) Determine el resultado del siguiente logaritmo sin hacer uso de la calculadora: (1 punto)

$$\log_9 \sqrt[5]{3 \cdot \sqrt{3}}$$

(b) Sabiendo que $\log\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}(p+2q)\right) = \frac{1}{2}(\log p + \log q)$, $p > 0, q > 0$, halle p en función de q. (1,5 puntos)

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS Y EJERCICIOS DEL CONTROL Nº 1 ANÁLISIS Y ENFOQUES

[Puntuación máxima: 2 puntos] **(Matemáticas NS, P1 Noviembre 2017, ej.1)**

1. (a) Resuelva la ecuación $log_2(x + 3) + log_2(x - 3) = 4$. (0,75 puntos)

(b) Resuelva el sistema $\left.\begin{array}{r} 2 \cdot log_2 x - 3\, log_3 y = 4 \\ -log_2 x + 5 \cdot log_3 y = -9 \end{array}\right\}$ (1,25 puntos)

(a) Resuelva la ecuación $\boldsymbol{log_2(x + 3) + log_2(x - 3) = 4}$.

Aplicando las propiedades de los logaritmos,

$$log_2(x + 3) + log_2(x - 3) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad log_2[(x + 3) \cdot (x - 3)] = 4 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad log_2[x^2 - 9] = 4$$

Aplicando la definición de logaritmo,

$$log_2[x^2 - 9] = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 9 = 2^4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 9 = 16 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = 16 + 9 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

Las solución $x = -5$ no es válida puesto que el primer logaritmo sustituido en este valor no existiría. Por lo tanto, la única solución es x = +5.

(b) Resuelva el sistema $\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{2 \cdot log_2 x - 3\, log_3 y = 4} \\ \boldsymbol{-log_2 x + 5 \cdot log_3 y = -9} \end{array}\right\}$

Haciendo los cambios de variable,

$$log_2 x = a \quad , \quad log_3 y = b$$

Tendremos que el sistema anterior es equivalente a,

$$\left.\begin{array}{r} 2 \cdot log_2 x - 3\, log_3 y = 4 \\ -log_2 x + 5 \cdot log_3 y = -9 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 2a - 3b = 4 \\ -a + 5b = -9 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema, por ejemplo, por sustitución despejando la variable a en la segunda ecuación

$$\left.\begin{array}{c} 2a - 3b = 4 \\ -a + 5b = -9 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 2a - 3b = 4 \\ 5b + 9 = a \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 2 \cdot (5b + 9) - 3b = 4 \\ 5b + 9 = a \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 10b + 18 - 3b = 4 \\ 5b + 9 = a \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 7b = -14 \\ 5b + 9 = a \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} b = -2 \\ 5b + 9 = a \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} b = -2 \\ -1 = a \end{array}\right\}$$

Deshacemos los cambios,

- Como $a = -1$ entonces $log_2 x = -1$ y por lo tanto, $x = 2^{-1} = 1/2$
- Como $b = -2$ entonces $log_3 y = -2$ y por lo tanto, $y = 3^{-2} = 1/9$

[Puntuación máxima: 1,5 puntos] (Matemáticas NS, P2 Mayo 2017, ej.6)

2. Sabiendo que $b = \log_2 a$ donde $a > 0$, escriba las siguientes expresiones en función de b.

$(i) log_2 a^3$ (0,25 puntos)

$(ii) log_2 \sqrt{8a^5}$ (0,5 puntos)

$(iii) log_8 \frac{4}{\sqrt[3]{a^2}}$ (0,75 puntos)

$\boldsymbol{(i) log_2 a^3}$

Aplicando las propiedades de los logaritmos,

$$log_2 a^3 = 3 \cdot log_2\ a = 3 \cdot b$$

$\boldsymbol{(ii) log_2 \sqrt{8a^5}}$

Aplicando las propiedades de los logaritmos,

$$log_2 \sqrt{8a^5} = log_2(\sqrt{8}) + log_2\left(\sqrt{a^5}\right) = log_2 2^{\frac{3}{2}} + log_2 a^{\frac{5}{2}} =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot log_2\ 2 + \frac{5}{2} \cdot\ log_2 a = \frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{5}{2} \cdot b = \frac{3 + 5b}{2}$$

$\boldsymbol{(iii) log_8 \frac{4}{\sqrt[3]{a^2}}}$

Aplicando el cambio de base,

$$log_8 \frac{4}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{log_2\left(\frac{4}{\sqrt[3]{a^2}}\right)}{log_2 8}$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos,

$$log_8 \frac{4}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{log_2\left(\frac{4}{\sqrt[3]{a^2}}\right)}{log_2 8} = \frac{log_2 4 - log_2 \sqrt[3]{a^2}}{log_2 2^3} = \frac{log_2 2^2 - log_2 a^{\frac{2}{3}}}{log_2 2^3} =$$

$$= \frac{2 \cdot log_2 2 - \frac{2}{3} \cdot log_2 a}{3 \cdot log_2 2} = \frac{2 \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot b}{3 \cdot 1} = \frac{2 - \frac{2}{3} \cdot b}{3} = \frac{6 - 2b}{9}$$

[Puntuación máxima: 2 puntos]

3. (a) Racionalice mediante notación radical, opere y simplifique al máximo: (1 punto)

$$\frac{12}{\sqrt[4]{4}}+\frac{3}{2\sqrt{2}-3}$$

(b) Sabiendo que $\ln 31 \approx 3{,}43 \quad \ln 2 \approx 0{,}69 \; y \; \ln 3 \approx 1{,}1$ calcule $\ln\sqrt{\frac{31}{6}}$ sin utilizar la calculadora. (1 punto)

(a) Racionalice mediante notación radical, opere y simplifique al máximo:

$$\boldsymbol{\frac{12}{\sqrt[4]{4}}+\frac{3}{2\sqrt{2}-3}}$$

Solución

$$\frac{12}{\sqrt[4]{4}}+\frac{3}{2\sqrt{2}-3}=\frac{12}{\sqrt[4]{2^2}}+\frac{3}{\left(2\sqrt{2}-3\right)}\cdot\frac{\left(2\sqrt{2}+3\right)}{\left(2\sqrt{2}+3\right)}=\frac{12}{\sqrt{2}}+\frac{3\cdot\left(2\sqrt{2}+3\right)}{\left(2\sqrt{2}\right)^2-3^2}=$$

$$=\frac{12}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{6\sqrt{2}+9}{8-9}=\frac{12\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}-6\sqrt{2}-9=\frac{12\sqrt{2}}{2}-6\sqrt{2}-9=$$

$$6\sqrt{2}-6\sqrt{2}-9=-9$$

(b) Sabiendo que $\boldsymbol{\ln 31 \approx 3,43 \quad \ln 2 \approx 0,69 \; y \; \ln 3 \approx 1,1}$ calcule $\boldsymbol{\ln\sqrt{\frac{31}{6}}}$ sin utilizar la calculadora.

Por las propiedades de los logaritmos,

$$\ln\sqrt{\frac{31}{6}}=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{31}{6}\right)=\frac{1}{2}\cdot(\ln 31-\ln 6)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(\ln 31-\ln(2\cdot 3))=\frac{1}{2}\cdot(\ln 31-\ln 2-\ln 3)$$

Sustituimos los logaritmos por los valores señalados en el enunciado, obteniendo el resultado,

$$\frac{1}{2}\cdot(\ln 31-\ln 2-\ln 3)\approx\frac{1}{2}\cdot(3{,}43-0{,}69-1{,}1)=\frac{1}{2}\cdot 1{,}64=0{,}82$$

[Puntuación máxima: 2 puntos]

4. Resuelva las siguientes ecuaciones mediante métodos algebraicos, sin hacer uso de la calculadora,

$a)\ \ e^{x+1} - e^{1-x^2} = 0$ $\qquad (0{,}5\ puntos)$

$b)\ \ e^{x+1} + e^{1-x} = 2e$ $\qquad (1{,}5\ puntos)$

$\boldsymbol{a)}\ \ \boldsymbol{e^{x+1} - e^{1-x^2} = 0}$

Puesto que,

$$e^{x+1} - e^{1-x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x+1} = e^{1-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x+1 = 1-x^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \quad x\cdot(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x+1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \end{cases}$$

$\boldsymbol{b)}\ \ e^{x+1} + e^{1-x} = 2e$

Puesto que,

$$e^{x+1} + e^{1-x} = 2e \quad \Leftrightarrow \quad e^x \cdot e^1 + \frac{e^1}{e^x} = 2e \quad \Leftrightarrow \quad e\cdot e^x + \frac{e}{e^x} = 2e$$

Aplicamos el cambio de variable $t = e^x$.

En ese caso,

$$e\cdot e^x + \frac{e}{e^x} = 2e \quad \Leftrightarrow \quad e\cdot t + \frac{e}{t} = 2e \quad \Leftrightarrow \quad e\cdot t^2 + e = 2et \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad e\cdot t^2 - 2et + e = 0$$

Aplicando la fórmula de la ecuación polinómica de segundo grado obtenemos,

$$t = \frac{-(-2e) \pm \sqrt{(-2e)^2 - 4\cdot e\cdot e}}{2\cdot e} = \frac{2e \pm \sqrt{4e^2 - 4e^2}}{2e} = 1$$

Deshacemos el cambio de variable para la única solución,

$$t = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = e^0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

[Puntuación máxima: 2,5 puntos] **((b) Matemáticas NS, P2 Mayo 2017, ej.6)**

5. (a) Determine el resultado del siguiente logaritmo sin hacer uso de la calculadora: (1 punto)

$$\log_9 \sqrt[5]{3 \cdot \sqrt{3}}$$

(b) Sabiendo que $\log\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}(p+2q)\right) = \frac{1}{2}(\log p + \log q)$, $p > 0, q > 0$, halle p en función de q. (1,5 puntos)

(a) Determine el resultado del siguiente logaritmo sin hacer uso de la calculadora:

Por la definición de logaritmo,

$$\log_9 \sqrt[5]{3 \cdot \sqrt{3}} = c \quad \Leftrightarrow \quad 9^c = \sqrt[5]{3 \cdot \sqrt{3}}$$

Por las propiedades de las potencias,

$$9^c = \sqrt[5]{\sqrt{3^2 \cdot 3}} \quad \Leftrightarrow \quad 9^c = \sqrt[5]{\sqrt{3^3}} \quad \Leftrightarrow \quad 9^c = \sqrt[10]{3^3} \quad \Leftrightarrow \quad 9^c = 3^{\frac{3}{10}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (3^2)^c = 3^{\frac{3}{10}} \quad \Leftrightarrow \quad 3^{2c} = 3^{\frac{3}{10}} \quad \Leftrightarrow \quad 2c = \frac{3}{10}$$

$$\Leftrightarrow \quad c = \frac{3}{20} \quad \Leftrightarrow \quad \log_9 \sqrt[5]{3 \cdot \sqrt{3}} = \frac{3}{20}$$

(b) Sabiendo que $\log\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}(p+2q)\right) = \frac{1}{2}(\log p + \log q)$, $p > 0, q > 0$, halle p en función de q.

Utilizando las propiedades de los logaritmos tenemos que,

$$\log\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}(p+2q)\right) = \frac{1}{2}(\log p + \log q) \quad \Leftrightarrow \quad \log\left(\frac{p+2q}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\log(pq) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \log\left(\frac{p+2q}{2\sqrt{2}}\right) = \log\sqrt{pq} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p+2q}{2\sqrt{2}} = \sqrt{pq}$$

Elevamos al cuadrado,

$$\frac{p+2q}{2\sqrt{2}} = \sqrt{pq} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{p+2q}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{pq}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(p+2q)^2}{4 \cdot 2} = pq$$

$$\Leftrightarrow \quad (p+2q)^2 = 8pq \quad \Leftrightarrow \quad p^2 + 4q^2 + 4pq = 8pq \quad \Leftrightarrow \quad p^2 + 4q^2 - 4pq = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (p-2q)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p - 2q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = 2q$$